

N° d'enregistrement

au C.N.R.S.

AO - 1777

ARTICLE PRINCIPAL

recouvrant en tout

LA THESE DE DOCTORAT ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES DE PARIS

par

M. Etienne LANERY

pour obtenir

le grade de Docteur Ès-Sciences

Sujet de la Thèse : *Etude asymptotique des Systèmes Markoviens à commande.*

soutenue le **04 NOV. 1969** devant la Commission d'Examen.

MM. FORTET

Président

BERGER

PALLU de la BARRIERE

TORTRAT

} Examinateurs



ETUDE ASYMPTOTIQUE DES SYSTEMES MARKOVIENS A COMMANDE

par E. LANERY (*)

Résumé. — Étude du comportement asymptotique du gain moyen maximal et de la stratégie optimale en horizon fini, quand cet horizon tend vers l'infini, d'une chaîne de Markov à commande, stationnaire, à temps discret, et à un nombre fini d'états.

I. — INTRODUCTION

On considère un système C à temps discret, et à un nombre fini d'états, numérotés de 1 à n . Étant donné deux états i et j , on suppose que la probabilité de transition de i à j en une étape, $p_i^j[k]$, ne dépend que du couple (i, j) et d'un paramètre k appelé commande.

Pour chaque état i , soit K_i l'ensemble des valeurs admissibles de k . Les ensembles K_i sont tous supposés finis et invariables au cours du temps.

Enfin, on suppose qu'à chaque transition $i \rightarrow j$ est associé un gain $r_i^j[k]$ (positif ou négatif), fonction de la commande k . Si $q_i[k]$ désigne le gain moyen obtenu dans la transition effectuée à partir de l'état i sous l'effet de la commande k , on a :

$$q_i[k] = \sum_{j=1}^n r_i^j[k] p_i^j[k] \quad (\text{I-1})$$

(*) Stagiaire de Recherche au C.N.R.S., Laboratoire d'Automatique Théorique de la Faculté des Sciences de Caen.

Ce travail a été effectué dans le cadre de la convention n° 66-00-246 entre la Délégation Générale à la Recherche Scientifique et Technique et la Faculté des Sciences de Caen. Il est préparatoire à une thèse de doctorat d'État ès Sciences Mathématiques enregistrée au Centre national de la Recherche Scientifique sous le numéro AO-1777 (à paraître).

On appelle tactique toute correspondance σ qui, à un état i du système, associe une commande $\sigma(i) \in K_i$; on désignera par $\mathfrak{S}$ l'ensemble $\prod_{i=1}^n K_i$ des tactiques. On appelle stratégie toute application S qui, à chaque instant du temps m , associe une tactique $S(m)$: une stratégie S étant choisie, le système est soumis à une chaîne de Markov, dont les probabilités de transition à l'instant m sont les $p_i^j[S(m)(i)]$. L'ensemble des stratégies sera noté $\mathcal{S}$.

Repérons les temps par rapport à une origine 0 et une orientation *positive vers le passé*. Dans ces conditions, étant donné des gains finals $v_i(0)$ et une stratégie $S \in \mathcal{S}$, le gain moyen $v_i[S](m)$ obtenu à l'instant 0 en partant de l'état i à l'instant m , pour la stratégie S , est défini par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} v_i[S](0) = v_i(0) \\ v_i[S](m) = q_i[S(m)(i)] + \sum_{j=1}^n v_j[S](m-1)p_i^j[S(m)(i)] \end{cases} \quad (\text{I-2})$$

Il sera commode d'écrire cette relation sous forme vectorielle, dans $(\mathbf{R}^n)'$. Si on pose :

$$\begin{aligned} v[S](m) &= (v_i[S](m))_{i=1, \dots, n} & v(0) &= (v_i(0))_{i=1, \dots, n} \\ q[\sigma] &= (q_i[\sigma(i)])_{i=1, \dots, n} & p[\sigma] &= (p_i^j[\sigma(i)])_{\substack{j=1, \dots, n \\ i=1, \dots, n}} \end{aligned} \quad (\text{I-3})$$

elle s'écrit :

$$\begin{cases} v[S](0) = v(0) \\ v[S](m) = q[S(m)] + v[S](m-1)p[S(m)] \end{cases} \quad (\text{I-4})$$

Le gain moyen maximal qu'il est possible d'obtenir à l'instant 0 en partant de l'état i à l'instant m , $\tilde{v}_i(m)$, est donné par la relation d'actualisation

$$\tilde{v}_i(m) = \sup_{k \in K_i} \left(q_i[k] + \sum_{j=1}^n \tilde{v}_j(m-1)p_i^j[k] \right) \quad (\text{I-5})$$

(avec $\tilde{v}_i(0) = v_i(0) \quad \forall i = 1, \dots, n$). Si $\tilde{v}(m)$ est le vecteur de $(\mathbf{R}^n)'$ dont la i -ème composante est $\tilde{v}_i(m)$, on a :

$$\begin{aligned} \tilde{v}(m) &= \sup_{\sigma \in \mathfrak{S}} (q[\sigma] + \tilde{v}(m-1)p[\sigma]) \\ &= q[\tilde{S}(m)] + \tilde{v}(m-1)p[\tilde{S}(m)] \end{aligned} \quad (\text{I-6})$$

$\tilde{S}$ étant une stratégie optimale, c'est-à-dire une stratégie S qui vérifie :

$$\tilde{v}(m) = v[S](m) \quad \forall m \in \mathbf{N}. \quad (\text{I-7})$$

Le présent travail a pour but d'étudier le comportement asymptotique de $\tilde{v}$ et de $\tilde{S}$. Les résultats obtenus ont déjà fait l'objet d'une note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences ([9]), mais ont été sensiblement améliorés depuis.

Pour $\tilde{v}$, des exemples très simples prouvent qu'il ne peut être question de limite; par contre, on montre sans difficulté que la suite $m \mapsto \frac{\tilde{v}(m)}{m}$ est bornée dans $(\mathbf{R}^n)'$, ce qui incite à étudier l'existence d'une direction asymptotique, et même d'une asymptote. Le théorème 3 (§ VII) donne une réponse comparable à celle obtenue dans le cas d'un système sans commande, où l'existence d'une asymptote est étroitement liée à la structure de la matrice de transition (cf. proposition 2, § IV). Quant au comportement asymptotique de $\tilde{S}$, on verra qu'il dépend de phénomènes de dégénérescence (proposition 20 et corollaire, § VIII); le seul résultat général obtenu est donc un théorème d'approximation (théorème 4, § VIII). Notons aussi une amélioration d'un résultat de R. A. Howard ([7]) au sujet des stratégies constantes dans le temps (théorème 2, § IV). Une deuxième partie (à paraître) étudiera quelques problèmes d'ordre pratique concernant le calcul effectif d'approximations.

Les exemples et les figures ont été rassemblés à la fin, où on trouvera aussi un index des notations.

L'auteur désire exprimer toute sa reconnaissance à M. R. Pallu de la Barrière. Son attentive direction a déterminé de très importantes améliorations du fond et de la forme.

II. — DEFINITIONS ET NOTATIONS

Sur $(\mathbf{R}^h)'$ ($h = 1, 2, \dots$), la norme utilisée sera la norme suivante :

$$\|x\| = \sup_{1 \leq i \leq h} |x_i| \quad (\text{II-1})$$

et on considérera l'ordre suivant :

$$x \leq y \iff x_i \leq y_i \quad \forall i = 1, \dots, h. \quad (\text{II-2})$$

On utilisera aussi les notations :

$$x < y \iff x \leq y \quad \text{et} \quad x \neq y \quad (\text{II-3})$$

$$x \leqslant y \iff x_i < y_i \quad \forall i = 1, \dots, h \quad (\text{II-4})$$

Soit $[(\mathbf{R}^h)']^r$ l'ensemble des r -uples de vecteurs de $(\mathbf{R}^h)'$:

$$[(\mathbf{R}^h)']^r = \left\{ \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^r \end{bmatrix} \mid x^j \in (\mathbf{R}^h)' \quad \forall j = 1, \dots, r \right\} \quad (\text{II-5})$$

Sur cet ensemble, on considère l'ordre lexicographique :

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^r \end{bmatrix} \preceq \begin{bmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^r \end{bmatrix} \iff \begin{cases} \text{— ou } x^1 < y^1 \\ \text{— ou } x^1 = y^1 \text{ et } x^2 < y^2 \\ \text{—} \\ \text{— ou } x^1 = y^1, \dots, x^{r-1} = y^{r-1} \text{ et } x^r \leq y^r \end{cases} \quad (\text{II-6})$$

Introduisons maintenant quelques instruments mathématiques qui sont d'un usage courant dans l'étude des chaînes de Markov discrètes. D'une façon générale, les notations seront celles de R. Pallu de la Barrière dans [10] (chap. 1 fin du § 2, chap. 6, et chap. 16) (*). Nous empruntons aussi à cet auteur ses conventions au sujet des partitions matricielles. Enfin, on trouvera dans le même ouvrage, ou dans [8], les démonstrations des principaux résultats rappelés ci-dessous.

On dit qu'une matrice est stochastique si elle est carrée, à coefficients positifs ou nuls, et si la somme des termes de chaque colonne est égale à 1.

A toute matrice stochastique p à n^2 éléments, il est associé un graphe (I_0, γ) dont l'ensemble des sommets est $I_0 = \{1, \dots, n\}$, et tel qu'à tout $i \in I_0$ soit associée la partie $\gamma(i)$ de I_0 ainsi définie :

$$j \in \gamma(i) \iff p_{ij} > 0. \quad (\text{II-7})$$

Soit $J(1), \dots, J(\nu)$, les classes finales de ce graphe. Si I est l'ensemble des états finals et I' celui des états transitoires, on a :

$$I = \bigcup_{\lambda=1}^{\nu} J(\lambda) = \mathbb{G}I'. \quad (\text{II-8})$$

Pour tout $\lambda = 1, \dots, \nu$, la matrice $p_{J(\lambda)}^{J(\lambda)}$ est stochastique (fig. 1). De plus :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \overbrace{p_{I'}^{I'}}^m = 0. \quad (\text{II-9})$$

Soit $\rho(\lambda)$ la période de la classe finale $J(\lambda)$, et soit $L(\lambda)(1), \dots, L(\lambda)(\rho(\lambda))$ les sous-classes de $J(\lambda)$. La matrice $p_{J(\lambda)}^{J(\lambda)}$ se partitionne de la façon indiquée par la figure 2, et $L(\lambda)(1), \dots, L(\lambda)(\rho(\lambda))$ sont aussi les classes finales du graphe associé à la matrice stochastique $\overbrace{p_{J(\lambda)}^{J(\lambda)}}^{\rho(\lambda)}$.

Soit u la matrice définie par :

$$u_i^j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \notin I' \quad \text{ou } j \notin I' \\ p_i^j & \text{si } i \in I' \quad \text{et } j \in I' \end{cases} \quad (\text{II-10})$$

(*) A l'exception de la puissance m -ième d'une matrice A , qui sera notée $\overbrace{A}^m$ au lieu de A^m .

On a :

$$\overbrace{(1-u)}^{-1} = 1 + u + \frac{2}{u} + \dots + \frac{m}{u} + \dots \quad (\text{II-11})$$

de sorte que :

$$\overbrace{(1-u)}^{-1} \geq 1 \geq 0 \quad (\text{II-12})$$

Soit π le projecteur spectral associé à la valeur propre 1 de p . La matrice π est stochastique, et vérifie :

$$p \cdot \pi = \pi \cdot p = \pi \cdot \pi = \pi \quad (\text{II-13})$$

Pour tout $\lambda = 1, \dots, v$, la matrice $\pi_{J(\lambda)}^{J(\lambda)}$ est égale au projecteur spectral associé à la valeur propre 1 de $p_{J(\lambda)}^{J(\lambda)}$; c'est une matrice stochastique de rang 1 (donc, tous ses vecteurs colonnes sont égaux), et :

$$\pi_{J(\lambda)}^{J(\lambda)} \geq 0 \quad \forall \lambda = 1, \dots, v \quad (\text{II-14})$$

De plus (fig. 3) :

$$\pi_{I'}^{J(\lambda)} = \pi_{J(\lambda)}^{J(\lambda)} p_{I'}^{J(\lambda)} \overbrace{(1-p_{I'}^{I'})}^{-1} \quad \forall \lambda = 1, \dots, v \quad (\text{II-15})$$

$$\pi_{I'}^{I'} = 0 \quad (\text{II-16})$$

Soit d le P.P.C.M. des nombres $\rho(\lambda)$ (pour $\lambda = 1, \dots, v$). On a :

$$\pi = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1 + p + \dots + \overbrace{p}^{d-1}}{d} \quad (\text{II-17})$$

Si $\pi^{(t)}$ est le projecteur spectral associé à la valeur propre 1 de $\widehat{p}^t$ ($t \geq 1$), on a aussi :

$$\pi = \frac{1 + p + \dots + \overbrace{p}^{t-1}}{t} \pi^{(t)} \quad (\text{II-18})$$

et pour tout multiple D de d :

$$\pi^{(D)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{mD}{p} = \frac{(d)}{\pi}. \quad (\text{II-19})$$

Si v est égal à 1, on dit que p est ergodique; si d est égal à 1, on dit que p est primitive; et si p est à la fois ergodique et primitive, on dit qu'elle est régulière.

Posons :

$$\omega = p - \pi \quad (\text{II-20})$$

on a, d'après (II-13) :

$$\omega \pi = \pi \omega = 0 \quad (\text{II-21})$$

$$\overbrace{\omega}^m = \overbrace{p}^m - \pi \quad \forall m \geq 1 \quad (\text{II-22})$$

De plus, $\mathbf{1} - \varpi$ est une matrice inversible, et on montre par récurrence que :

$$\overbrace{(\mathbf{1} - \varpi)}^{-1} = \mathbf{1} + \varpi + \dots + \overbrace{\varpi}^{m-1} + \overbrace{(\mathbf{1} - \varpi)}^{-1} \varpi^m \quad \forall m \in \mathbf{N} \quad (\text{II-23})$$

$$\overbrace{(\mathbf{1} - \varpi)}^{-1} \varpi^m = \overbrace{(\mathbf{1} - \varpi)}^{-1} \overbrace{p}^m - \pi \quad \forall m \geq 1. \quad (\text{II-24})$$

Lemme 1. — Soit x et y deux vecteurs de $(\mathbf{R}^n)'$. On a les implications suivantes :

$$x \geq y \Rightarrow xp \geq yp \quad (\text{II-25})$$

$$x_I \geq y_I \Rightarrow x\pi \geq y\pi \quad (\text{II-26})$$

En effet, p et π sont des matrices à coefficients positifs (ou nuls) et π^I est nul.

Lemme 2. — Soit w et x deux vecteurs de $(\mathbf{R}^n)'$. Si $w\pi$ est nul, on a les implications suivantes :

$$x \geq w + \overbrace{x\hat{p}}^m \Rightarrow x_I = w_I + x \left(\overbrace{\hat{p}}^m \right)_I \quad (\text{II-27})$$

$$x \leq w + \overbrace{x\hat{p}}^m \Rightarrow x_I = w_I + x \left(\overbrace{\hat{p}}^m \right)_I \quad (\text{II-28})$$

$$x \geq w + x \overbrace{\pi}^{(m)} \Rightarrow x_I = w_I + x \overbrace{\pi_I}^{(m)} \quad (\text{II-29})$$

$$x \leq w + x \overbrace{\pi}^{(m)} \Rightarrow x_I = w_I + x \overbrace{\pi_I}^{(m)} \quad (\text{II-30})$$

quel que soit $m \in \mathbf{N}$.

Démonstration. — Supposons $x \geq w + \overbrace{x\hat{p}}^m$. Soit η le vecteur de $(\mathbf{R}^n)'$ tel que :

$$x = w + \overbrace{x\hat{p}}^m + \eta \quad (\text{II-31})$$

on a :

$$x\pi = w\pi + x\pi + \eta\pi \quad (\text{II-32})$$

Par conséquent, $\eta\pi$ est nul; et comme η vérifie $\eta \geq 0$, il en résulte, d'après (II-14) et (II-8), que η_I est nul, ce qui prouve que :

$$x_I = w_I + x \left(\overbrace{\hat{p}}^m \right)_I \quad (\text{II-33})$$

Les autres implications se démontrent de la même façon.

Lemme 3. — Soit x et η deux vecteurs de $(\mathbf{R}^n)'$. Si η vérifie $\eta \geq 0$, on a les implications suivantes :

$$x + \eta = xp \quad \Rightarrow \quad x + \eta \leq x + \overbrace{\eta(1-u)}^{-1} = x\pi \quad (\text{II-34})$$

$$x = \eta + xp \quad \Rightarrow \quad x = \overbrace{\eta(1-u)}^{-1} + x\pi \geq \eta + x\pi \quad (\text{II-35})$$

Démonstration. — Supposons $x + \eta = xp$. Par multiplication par π , il vient : $\eta\pi = 0$. Comme η vérifie $\eta \geq 0$, le vecteur η_I est nul. Il en résulte, en raison de la définition de la matrice u (II-10) :

$$\overbrace{\eta p}^m = \overbrace{\eta u}^m \quad \forall m \in \mathbf{N} \quad (\text{II-36})$$

Dans ces conditions, on montre par récurrence que :

$$x + \eta(1 + u + \dots + \overbrace{u}^m) = x \frac{m+1}{p} \quad \forall m \in \mathbf{N} \quad (\text{II-37})$$

et par conséquent, pour tout $m \in \mathbf{N}$:

$$\begin{aligned} x + \eta \left(1 + u + \dots + \frac{m-1}{u} + \frac{m}{u} \frac{1 + u + \dots + \frac{d-1}{u}}{d} \right) \\ = x \frac{m+1}{p} \frac{1 + \dots + \frac{d-1}{p}}{d} \end{aligned} \quad (\text{II-38})$$

En passant à la limite quand m tend vers l'infini, on obtient :

$$x + \overbrace{\eta(1-u)}^{-1} = x\pi \quad (\text{II-39})$$

Pour démontrer la première implication, il ne reste plus qu'à montrer que η est inférieur à $\overbrace{\eta(1-u)}^{-1}$, ce qui est évident d'après (II-12).

La seconde implication se démontre de façon analogue.

Évidemment, comme à toute tactique $\sigma \in \mathfrak{S}$ est associée une matrice stochastique $p[\sigma]$, il lui est aussi associé un graphe $(I_0, \gamma[\sigma])$ dont les classes finales sont $J[\sigma](1), \dots, J[\sigma](v[\sigma])$ et dont l'ensemble des états finals (resp. transitoires) est $I[\sigma]$ (resp. $I'[\sigma]$). On appellera $\pi[\sigma]$ (resp. $\overbrace{\pi[\sigma]}^{(u)}$) le projecteur spectral associé à la valeur propre 1 de la matrice $p[\sigma]$ (resp. $\overbrace{p[\sigma]}^t$), et $d[\sigma]$ sera le P.P.C.M. de la période $\rho[\sigma](\lambda)$ des classes finales $J[\sigma](\lambda)$. Enfin, par définition :

$$\omega[\sigma] = p[\sigma] - \pi[\sigma]. \quad (\text{II-40})$$

III. — COMPARAISON DES TACTIQUES

Pour toute tactique σ , soit $w[\sigma]$ le vecteur de $(\mathbf{R}^n)'$ défini par les relations :

$$\begin{cases} w[\sigma]\pi[\sigma] = 0 \\ q[\sigma] + w[\sigma]p[\sigma] = q[\sigma]\pi[\sigma] + w[\sigma] \end{cases} \quad (\text{III-1})$$

(On a : $w[\sigma] = q[\sigma] \left[\overbrace{(1 - \pi[\sigma])}^{-1} - \pi[\sigma] \right]$).

Soit $x \in (\mathbf{R}^n)'$. On se propose d'étudier l'existence d'une tactique $\tilde{\sigma}^x$ vérifiant :

$$\begin{bmatrix} q[\tilde{\sigma}^x]\pi_i[\tilde{\sigma}^x] \\ w_i[\tilde{\sigma}^x] + x\pi_i[\tilde{\sigma}^x] \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} q[\sigma]\pi_i[\sigma] \\ w_i[\sigma] + x\pi_i[\sigma] \end{bmatrix} \quad \forall i \in I_0 \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S} \quad (\text{III-2})$$

Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}$, soit $\omega^x[\sigma]$ le vecteur de $(\mathbf{R}^n)'$ tel que :

$$\begin{cases} \omega^x[\sigma]\pi[\sigma] = 0 \\ x - w[\sigma] + \omega^x[\sigma]p[\sigma] = (x - w[\sigma])\pi[\sigma] + \omega^x[\sigma] \end{cases} \quad (\text{III-3})$$

Pour chaque $x \in (\mathbf{R}^n)'$, on considérera sur $\mathfrak{S}$ le préordre :

$$\sigma \leq \tau \iff \begin{bmatrix} q[\sigma]\pi[\sigma] \\ w[\sigma] + x\pi[\sigma] \\ \omega^x[\sigma] \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} q[\tau]\pi[\tau] \\ w[\tau] + x\pi[\tau] \\ \omega^x[\tau] \end{bmatrix} \quad (\text{III-4})$$

et on utilisera aussi la notation :

$$\sigma < \tau \iff \sigma \leq \tau \quad \text{et} \quad \tau \not\leq \sigma \quad (\text{III-5})$$

Proposition 1. — Étant donné une tactique σ , soit, pour tout état $i \in I_0$, $K_i^x(\sigma)$ l'ensemble des commandes $k \in K_i$ qui maximisent lexicographiquement le 3-uple :

$$\begin{bmatrix} q[\sigma]\pi[\sigma]p_i[k] \\ q_i[k] + (w[\sigma] + x\pi[\sigma])p_i[k] \\ \omega^x[\sigma]p_i[k] \end{bmatrix}$$

Si φ^x est la multi-application de $\mathfrak{S}$ dans $\mathfrak{S}$ définie par :

$$\varphi^x[\sigma] = \{ \tau \in \mathfrak{S} \mid \tau(i) \in K_i^x[\sigma] \quad \forall i \in I_0, \quad \text{et} : \quad \tau(i) = \sigma(i) \quad \text{si} \quad \sigma(i) \in K_i^x[\sigma] \} \quad (\text{III-6})$$

on a :

$$\tau \in \varphi^x(\sigma) \quad \text{et} \quad \tau \neq \sigma \quad \Rightarrow \quad \tau > \sigma \quad (\text{III-7})$$

REMARQUE :

$$\sigma \in \varphi^x(\sigma) \Leftrightarrow \varphi^x(\sigma) = \{ \sigma \} \quad (\text{III-8})$$

Démonstration. — Soit τ un élément de $\varphi^x(\sigma)$. Considérons les vecteurs ζ , η et μ de $(\mathbf{R}^n)'$ tels que :

$$q[\sigma]\pi[\sigma]p[\sigma] + \zeta = q[\sigma]\pi[\sigma]p[\tau] \quad (\text{III-9})$$

$$q[\sigma] + (w[\sigma] + x\pi[\sigma])p[\sigma] + \eta = q[\tau] + (w[\sigma] + x\pi[\sigma])p[\tau] \quad (\text{III-10})$$

$$\omega^x[\sigma]p[\sigma] + \mu = \omega^x[\sigma]p[\tau] \quad (\text{III-11})$$

Ils vérifient :

$$\begin{bmatrix} \zeta_i \\ \eta_i \\ \mu_i \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall i \in I_0, \quad \text{et :} \quad \begin{bmatrix} \zeta_i \\ \eta_i \\ \mu_i \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \tau(i) = \sigma(i) \quad (\text{III-12})$$

1) La relation (III-9) s'écrit encore :

$$q[\sigma]\pi[\sigma] + \zeta = q[\sigma]\pi[\sigma]p[\tau] \quad (\text{III-13})$$

Comme ζ vérifie $\zeta \geq 0$, on en déduit d'abord que $\zeta_{I[\tau]}$ est nul (lemme 2), et par conséquent $\eta_{I[\tau]} \geq 0$. De plus, d'après le lemme 3, on en déduit aussi :

$$q[\sigma]\pi[\sigma] + \zeta \leq q[\sigma]\pi[\sigma]\pi[\tau] \quad (\text{III-14})$$

D'après (III-1), la relation (III-10) s'écrit :

$$q[\sigma]\pi[\sigma] + w[\sigma] + x\pi[\sigma] + \eta = q[\tau] + (w[\sigma] + x\pi[\sigma])p[\tau] \quad (\text{III-15})$$

Par multiplication par $\pi[\tau]$, et compte tenu de (III-14), il vient :

$$q[\sigma]\pi[\sigma] + \zeta + \eta\pi[\tau] \leq q[\tau]\pi[\tau] \quad (\text{III-16})$$

ce qui montre que $q[\sigma]\pi[\sigma]$ est inférieur à $q[\tau]\pi[\tau]$ (lemme 1) et que l'égalité ne peut avoir lieu que si ζ et $\eta_{I[\tau]}$ sont nuls (d'après (II-14)).

2) Supposons $q[\sigma]\pi[\sigma]$ et $q[\tau]\pi[\tau]$ égaux. Alors les composantes des vecteurs η et $\mu_{I[\tau]}$ sont toutes positives ou nulles. Par ailleurs, compte tenu de (III-1), la relation (III-15) peut aussi s'écrire :

$$w[\sigma] + x\pi[\sigma] + \eta = w[\tau] + (w[\sigma] + x\pi[\sigma] - w[\tau])p[\tau] \quad (\text{III-17})$$

ou encore :

$$\begin{aligned} w[\sigma] + x\pi[\sigma] - w[\tau] - x\pi[\tau] + \eta \\ = (w[\sigma] + x\pi[\sigma] - w[\tau] - x\pi[\tau])p[\tau] \end{aligned} \quad (\text{III-18})$$

et par conséquent (lemme 3) :

$$w[\sigma] + x\pi[\sigma] - w[\tau] - x\pi[\tau] + \eta \leq w[\sigma]\pi[\tau] + x\pi[\sigma]\pi[\tau] - x\pi[\tau] \quad (\text{III-19})$$

Or, d'après (III-3), la relation (III-11) s'écrit aussi :

$$(x - w[\sigma])\pi[\sigma] + \omega^x[\sigma] + \mu = x - w[\sigma] + \omega^x[\sigma]p[\tau] \quad (\text{III-20})$$

d'où :

$$x\pi[\sigma]\pi[\tau] + \mu\pi[\tau] = x\pi[\tau] - w[\sigma]\pi[\tau] \quad (\text{III-21})$$

Donc, il résulte de (III-19) :

$$w[\sigma] + x\pi[\sigma] - w[\tau] - x\pi[\tau] \leq -\eta - \mu\pi[\tau] \quad (\text{III-22})$$

ce qui montre que $w[\sigma] + x\pi[\sigma]$ est inférieur à $w[\tau] + x\pi[\tau]$ et que, pour avoir égalité, il faut que η et $\mu_{I[\tau]}$ soient nuls.

3) Supposons que $q[\sigma]\pi[\sigma]$ et $w[\sigma] + x\pi[\sigma]$ soient respectivement égaux à $q[\tau]\pi[\tau]$ et $w[\tau] + x\pi[\tau]$. Alors, μ vérifie $\mu \geq 0$ et $\tau(i)$ est égal à $\sigma(i)$ quel que soit i appartenant à $I[\tau]$.

Si $w[\sigma] + x\pi[\sigma]$ et $w[\tau] + x\pi[\tau]$ sont égaux, on a :

$$x - w[\sigma] = x - w[\tau] + x\pi[\sigma] - x\pi[\tau] \quad (\text{III-23})$$

Et si τ et σ sont égales sur $I[\tau]$, il résulte de la structure des matrices $\pi[\sigma]$ et $\pi[\tau]$ (fig. 3) que :

$$\pi[\sigma]\pi[\tau] = \pi[\tau] \quad (\text{III-24})$$

Considérons alors la relation (III-20). D'après (III-23) elle peut maintenant s'écrire :

$$x\pi[\sigma] + \omega^x[\sigma] + \mu = x - w[\tau] + x\pi[\sigma] - x\pi[\tau] + \omega^x[\sigma]p[\tau] \quad (\text{III-25})$$

D'après (III-3), il vient :

$$\omega^x[\sigma] + \mu = (x - w[\tau])\pi[\tau] + \omega^x[\tau] - x\pi[\tau] + (\omega^x[\sigma] - \omega^x[\tau])p[\tau] \quad (\text{III-26})$$

soit encore :

$$\omega^x[\sigma] - \omega^x[\tau] + \mu = (\omega^x[\sigma] - \omega^x[\tau])p[\tau] \quad (\text{III-27})$$

et comme μ vérifie $\mu \geq 0$:

$$\omega^x[\sigma] - \omega^x[\tau] + \mu \leq (\omega^x[\sigma] - \omega^x[\tau])\pi[\tau] \quad (\text{III-28})$$

Or $\omega^x[\tau]\pi[\tau]$ est nul, et d'après (III-24), il en est de même pour $\omega^x[\sigma]\pi[\tau]$, de sorte que :

$$\omega^x[\sigma] - \omega^x[\tau] + \mu \leq 0 \quad (\text{III-29})$$

ce qui prouve que $\omega^x[\sigma]$ est inférieur à $\omega^x[\tau]$ et que l'égalité n'est réalisée que si μ est nul, c'est-à-dire, que si σ et τ sont égales; et la démonstration est terminée.

Théorème 1. — (i) La multi-application φ^x admet au moins un point fixe.

(ii) Tout point fixe $\tilde{\sigma}^x$ de φ^x vérifie :

$$\begin{bmatrix} q[\tilde{\sigma}^x]\pi_i[\tilde{\sigma}^x] \\ w_i[\tilde{\sigma}^x] + x\pi_i[\tilde{\sigma}^x] \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} q[\sigma]\pi_i[\sigma] \\ w_i[\sigma] + x\pi_i[\sigma] \end{bmatrix} \quad \forall i \in I_0 \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S} \quad (\text{III-30})$$

Pour simplifier l'écriture, on posera :

$$x[\sigma] = w[\sigma] + x\pi[\sigma] \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S} \quad (\text{III-31})$$

Démonstration. — (i) La multi-application φ^x admet au moins un point fixe. Soit σ_0 une tactique arbitraire; étant donné une tactique $\sigma_r (r \geq 0)$, soit σ_{r+1} une tactique appartenant à $\varphi^x(\sigma_r)$. On définit ainsi par récurrence une suite $\{\sigma_r\}$ d'éléments de $\mathfrak{S}$ qui vérifie (d'après (III-7)) :

$$\sigma_{r+1} \neq \sigma_r \Rightarrow \sigma_{r+1} \succ \sigma_r \quad (\text{III-32})$$

Comme l'ensemble $\mathfrak{S}$ est fini, il existe un entier s tel que σ_s soit égale à σ_{s+1} , ce qui revient à dire que σ_s est un point fixe de la multi-application φ^x .

C.Q.F.D.

(ii) Tout point fixe $\tilde{\sigma}^x$ de φ^x vérifie (III-30). Soit $\sigma \in \mathfrak{S}$. Puisque $\tilde{\sigma}^x \in \varphi^x(\tilde{\sigma}^x)$, les vecteurs ζ'_i , η'_i et μ'_i de $(\mathbf{R}^n)'$ tels que :

$$q[\tilde{\sigma}^x]\pi[\tilde{\sigma}^x]p[\tilde{\sigma}^x] = q[\tilde{\sigma}^x]\pi[\tilde{\sigma}^x]p[\sigma] + \zeta' \quad (\text{III-33})$$

$$q[\tilde{\sigma}^x] + x[\tilde{\sigma}^x]p[\tilde{\sigma}^x] = q[\sigma] + x[\tilde{\sigma}^x]p[\sigma] + \eta' \quad (\text{III-34})$$

$$\omega^x[\tilde{\sigma}^x]p[\tilde{\sigma}^x] = \omega^x[\tilde{\sigma}^x]p[\sigma] + \mu' \quad (\text{III-35})$$

vérifient :

$$\begin{bmatrix} \zeta'_i \\ \eta'_i \\ \mu'_i \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall i \in I_0 \quad (\text{III-36})$$

1) Soit $u[\sigma]$ la matrice définie par :

$$u^j_i[\sigma] = \begin{cases} 0 & \text{si } i \notin I'[\sigma] \quad \text{ou } j \notin I'[\sigma] \\ p^j_i[\sigma] & \text{si } i \in I'[\sigma] \quad \text{et } j \in I'[\sigma] \end{cases} \quad (\text{III-37})$$

De la relation (III-33) on déduit, d'une part, que $\zeta'_{I[\sigma]}$ est nul, et par conséquent $\eta'_{I[\sigma]} \geq 0$, et d'autre part (lemme 3) :

$$q[\tilde{\sigma}^x]\pi[\tilde{\sigma}^x] = q[\tilde{\sigma}^x]\pi[\tilde{\sigma}^x]\pi[\sigma] + \zeta'(\mathbf{1} - \overbrace{\mathbf{1}}^{-1}u[\sigma]) \quad (\text{III-38})$$

Par ailleurs, la relation (III-34) peut aussi s'écrire :

$$q[\tilde{\sigma}^x]\pi[\tilde{\sigma}^x] + x[\tilde{\sigma}^x] = q[\sigma] + x[\tilde{\sigma}^x]p[\sigma] + \eta' \quad (\text{III-39})$$

d'où :

$$q[\tilde{\sigma}^x]\pi[\tilde{\sigma}^x]\pi[\sigma] = q[\sigma]\pi[\sigma] + \eta'\pi[\sigma] \quad (\text{III-40})$$

On a donc :

$$q[\tilde{\sigma}^x]\pi[\tilde{\sigma}^x] = q[\sigma]\pi[\sigma] + \zeta'(\overbrace{1 - u[\sigma]}^{-1}) + \eta'\pi[\sigma] \quad (\text{III-41})$$

ce qui prouve que $q[\tilde{\sigma}^x]\pi[\tilde{\sigma}^x]$ est supérieur à $q[\sigma]\pi[\sigma]$ puisque $(\overbrace{1 - u[\sigma]}^{-1})$ est une matrice à coefficients positifs ou nuls.

2) Supposons qu'il existe un indice $i \in I_0$ pour lequel $q[\tilde{\sigma}^x]\pi_i[\tilde{\sigma}^x]$ et $q[\sigma]\pi_i[\sigma]$ soient égaux. Alors, compte tenu de (II-11), on a :

$$\begin{cases} \zeta'(\overbrace{u[\sigma]}^r)_i = 0 & \forall r \in \mathbb{N} \\ \eta'\pi_i[\sigma] = 0 \end{cases} \quad (\text{III-42})$$

et par conséquent, puisque η' vérifie $\eta'_{I_0} \geq 0$:

$$\begin{cases} \eta'_j \geq 0 & \forall j \in \{j \in I_0 \mid \exists r \in \mathbb{N} \text{ tel que } (\overbrace{u[\sigma]}^r)_j > 0\} \cup I[\sigma] \\ \mu'_j \geq 0 & \forall j \in \{j \in I_0 \mid \pi'_j[\sigma] > 0\}. \end{cases} \quad (\text{III-43})$$

$$(\text{III-44})$$

Considérons la relation (III-39); elle peut encore s'écrire :

$$q[\tilde{\sigma}^x]\pi[\tilde{\sigma}^x] + x[\tilde{\sigma}^x] = q[\sigma]\pi[\sigma] + x[\sigma] + (x[\tilde{\sigma}^x] - x[\sigma])p[\sigma] + \eta' \quad (\text{III-45})$$

En utilisant (III-41), il vient :

$$x[\tilde{\sigma}^x] - x[\sigma] = (x[\tilde{\sigma}^x] - x[\sigma])p[\sigma] - \zeta'(\overbrace{1 - u[\sigma]}^{-1}) - \eta'\pi[\sigma] + \eta' \quad (\text{III-46})$$

A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on en déduit, pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} x[\tilde{\sigma}^x] - x[\sigma] &= (x[\tilde{\sigma}^x] - x[\sigma])\overbrace{p[\sigma]}^m \\ &\quad - \zeta'(\overbrace{1 - u[\sigma]}^{-1}) \left[\overbrace{p[\sigma]}^{m-1} + \overbrace{p[\sigma]}^{m-2} + \dots + p[\sigma] + \mathbf{1} \right] \\ &\quad - m\eta'\pi[\sigma] \\ &\quad + \eta' \left[\overbrace{p[\sigma]}^{m-1} + \overbrace{p[\sigma]}^{m-2} + \dots + p[\sigma] + \mathbf{1} \right] \end{aligned} \quad (\text{III-47})$$

En remplaçant m par $m + s$ dans (III-47) et en prenant la moyenne quand s varie de 1 à $d[\sigma]$, on obtient, pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} [\tilde{\sigma}^x] - x[\sigma] &= (x[\tilde{\sigma}^x] - x[\sigma]) \frac{\widehat{p[\sigma]}^{m+1} \mathbf{1} + p[\sigma] + \dots + \widehat{p[\sigma]}^{d[\sigma]-1}}{d[\sigma]} \\ &\quad - \zeta'(\widehat{1-u[\sigma]}^{-1}) \left[\mathbf{1} + p[\sigma] + \dots + \widehat{p[\sigma]}^{m-1} + \widehat{p[\sigma]}^m \frac{\mathbf{1} + \dots + \widehat{p[\sigma]}^{d[\sigma]-1}}{d[\sigma]} \right] \\ &\quad - \left[\frac{(m+1) + (m+2) + \dots + (m+d[\sigma])}{d[\sigma]} \right] \eta' \pi[\sigma] \quad (\text{III-48}) \\ &\quad + \eta' \left[\mathbf{1} + p[\sigma] + \dots + \widehat{p[\sigma]}^{m-1} + \widehat{p[\sigma]}^m \frac{\mathbf{1} + \dots + \widehat{p[\sigma]}^{d[\sigma]-1}}{d[\sigma]} \right]. \end{aligned}$$

Quand m tend vers l'infini, on a :

$$(x[\tilde{\sigma}^x] - x[\sigma]) \frac{\widehat{p[\sigma]}^{m+1} \mathbf{1} + \dots + \widehat{p[\sigma]}^{d[\sigma]-1}}{d[\sigma]} \rightarrow (x[\tilde{\sigma}^x] - x[\sigma]) \pi[\sigma] \quad (\text{III-49})$$

D'autre part, puisque ζ' vérifie $\zeta'_{I[\sigma]} = 0$, il en est de même pour le vecteur $\zeta'(\widehat{1-u[\sigma]}^{-1}) = \zeta'(\mathbf{1} + u[\sigma] + \dots)$. Aussi :

$$\begin{aligned} &\zeta'(\widehat{1-u[\sigma]}^{-1}) \left[\mathbf{1} + p[\sigma] + \dots + \widehat{p[\sigma]}^{m-1} + \widehat{p[\sigma]}^m \frac{\mathbf{1} + \dots + \widehat{p[\sigma]}^{d[\sigma]-1}}{d[\sigma]} \right] \\ &= \zeta'(\mathbf{1} + u[\sigma] + \dots) \left[\mathbf{1} + u[\sigma] + \dots + \widehat{u[\sigma]}^{m-1} + \widehat{u[\sigma]}^m \frac{\mathbf{1} + \dots + \widehat{u[\sigma]}^{d[\sigma]-1}}{d[\sigma]} \right] \quad (\text{III-50}) \end{aligned}$$

et comme $\zeta'(\widehat{u[\sigma]}^r)_i$ est nul quel que soit $r \in \mathbb{N}$, on a, pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\zeta'(\widehat{1-u[\sigma]}^{-1}) \left[\mathbf{1} + p[\sigma] + \dots + \widehat{p[\sigma]}^{m-1} + \widehat{p[\sigma]}^m \frac{\mathbf{1} + \dots + \widehat{p[\sigma]}^{d[\sigma]-1}}{d[\sigma]} \right]_i = 0 \quad (\text{III-51})$$

De plus, $\eta' \pi_i[\sigma]$ est nul, donc :

$$\left[\frac{(m+1) + \dots + (m+d[\sigma])}{d[\sigma]} \right] \eta' \pi_i[\sigma] = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad (\text{III-52})$$

Par conséquent, d'après (III-48), il existe un nombre 1 tel que :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \eta' \left[\mathbf{1} + p[\sigma] + \dots + \widehat{p[\sigma]}^{m-1} + \widehat{p[\sigma]}^m \frac{\mathbf{1} + \dots + \widehat{p[\sigma]}^{d[\sigma]-1}}{d[\sigma]} \right]_i = 1 \quad (\text{III-53})$$

Montrons que l est positif. Comme η' vérifie $\eta'_{I[\sigma]} \geq 0$, il suffit de montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\eta'_{I'[\sigma]} \left[1 + p[\sigma] + \dots + \widehat{p[\sigma]}^{m-1} + \widehat{p[\sigma]}^m \frac{1 + \dots + \widehat{p[\sigma]}^{d[\sigma]-1}}{d[\sigma]} \right]^{I'[\sigma]} \geq 0 \quad (\text{III-54})$$

Mais :

$$\left[\widehat{\frac{r}{p[\sigma]}} \right]^{I'[\sigma]} = \left[\widehat{\frac{r}{u[\sigma]}} \right]^{I'[\sigma]} \quad \forall r \in \mathbb{N} \quad (\text{III-55})$$

si bien que (III-54) est une conséquence de (III-43).

En définitive, en passant à la limite quand m tend vers l'infini, dans (III-48), il vient :

$$x_i[\tilde{\sigma}^x] - x_i[\sigma] = (x[\tilde{\sigma}^x] - x[\sigma])\pi_i[\sigma] + l \quad (\text{III-56})$$

où l est un nombre positif.

Considérons maintenant la relation (III-35). Elle peut aussi s'écrire :

$$(x - w[\tilde{\sigma}^x])\pi[\tilde{\sigma}^x] + \omega^x[\tilde{\sigma}^x] = x - w[\tilde{\sigma}^x] + \omega^x[\tilde{\sigma}^x]p[\sigma] + \mu' \quad (\text{III-57})$$

ou encore :

$$w[\tilde{\sigma}^x] + x\pi[\tilde{\sigma}^x] - x + \omega^x[\tilde{\sigma}^x] = \omega^x[\tilde{\sigma}^x]p[\sigma] + \mu' \quad (\text{III-58})$$

et par multiplication par $\pi[\sigma]$, il vient :

$$(x[\tilde{\sigma}^x] - x[\sigma])\pi[\sigma] = \mu'\pi[\sigma] \quad (\text{III-59})$$

En combinant (III-56) et (III-59), on obtient :

$$x_i[\tilde{\sigma}^x] - x_i[\sigma] = \mu'\pi_i[\sigma] + l \quad (\text{III-60})$$

ce qui prouve, d'après (III-44), que $x_i[\tilde{\sigma}^x]$ est supérieur à $x_i[\sigma]$, et la démonstration est terminée.

Remarques au théorème 1.

1) La démonstration de la propriété (i) fournit un algorithme pour le calcul d'un point fixe de φ^x . De ce point de vue, il peut être intéressant de noter que :

$$w[\sigma] = q[\sigma] \left[(\widehat{1 - \pi[\sigma]})^{-1} - \pi[\sigma] \right] \quad (\text{III-61})$$

$$\omega^x[\sigma] = (x - w[\sigma]) \left[(\widehat{1 - \pi[\sigma]})^{-1} - \pi[\sigma] \right] \quad (\text{III-62})$$

2) Les relations (III-41) et (III-42) montrent qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $q[\sigma]\pi[\sigma]$ soit égal à $q[\tilde{\sigma}^x]\pi[\tilde{\sigma}^x]$ est que ζ et $\eta_{I[\sigma]}$ soient nuls, c'est-à-dire que :

$$q[\tilde{\sigma}^x]\pi[\tilde{\sigma}^x]p_i[\sigma] = q[\tilde{\sigma}^x]\pi_i[\tilde{\sigma}^x] \quad \forall i \in I_0 \quad (\text{III-63})$$

$$q_i[\sigma] + x[\tilde{\sigma}^x]p_i[\sigma] = q_i[\tilde{\sigma}^x] + x[\tilde{\sigma}^x]p_i[\tilde{\sigma}^x] \quad \forall i \in I[\sigma] \quad (\text{III-64})$$

3) Pour tout vecteur $x \in (\mathbf{R}^n)'$ on posera :

$$\tilde{x} = x[\tilde{\sigma}^x] \quad (\text{III-65})$$

D'après (III-30) $\tilde{x}$ est parfaitement déterminé, même si φ^x possède plusieurs points fixes,

IV. — ETUDE DES STRATEGIES CONSTANTES DANS LE TEMPS

Soit S_c l'ensemble des stratégies constantes dans le temps. R. A. Howard ([7]) a étudié l'existence d'une stratégie appartenant à S_c qui maximise l'expression $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{v[S_c](m)}{m}$ quand S_c décrit l'ensemble S_c . Nous allons voir qu'il est possible d'obtenir un résultat légèrement plus fort.

Proposition 2. — Soit $S_c \in S_c$, et soit σ la tactique telle que :

$$S_c(m) = \sigma \quad \forall m \in \mathbf{N}. \quad (\text{IV-1})$$

Alors, pour tout $s = 0, \dots, d[\sigma] - 1$:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [v[S_c](md[\sigma] + s) - (md[\sigma] + s)q[\sigma]\pi[\sigma]] = w[\sigma] + (v(0) - w[\sigma]) \overbrace{\pi[\sigma]}^{(d[\sigma])} \overbrace{p[\sigma]}^s \quad (\text{IV-2})$$

REMARQUE. — Ce résultat est une propriété des systèmes stationnaires sans commande.

Démonstration. — On a :

$$\begin{aligned} v[S_c](md[\sigma] + s) &= q[\sigma] \left(\mathbf{1} + p[\sigma] + \dots + \overbrace{p[\sigma]}^{md[\sigma] + s - 1} \right) + v(0) \overbrace{p[\sigma]}^{md[\sigma] + s} \\ &= (md[\sigma] + s)q[\sigma]\pi[\sigma] + v(0) \overbrace{p[\sigma]}^{md[\sigma]} \overbrace{p[\sigma]}^s \\ &\quad + q[\sigma] \left[\mathbf{1} - \pi[\sigma] + \varpi[\sigma] + \dots + \overbrace{\varpi[\sigma]}^{md[\sigma] + s - 1} \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{1} - \varpi[\sigma]) \overbrace{\varpi[\sigma]}^{md[\sigma] + s} \right] \\ &\quad - q[\sigma] (\mathbf{1} - \varpi[\sigma]) \overbrace{\varpi[\sigma]}^{md[\sigma] + s} \end{aligned} \quad (\text{IV-3})$$

Compte tenu de (II-23) et (II-24), il vient :

$$\begin{aligned} v[S_c](md[\sigma] + s) - (md[\sigma] + s)q[\sigma]\pi[\sigma] &= v(0) \overbrace{p[\sigma]}^{md[\sigma]} \overbrace{p[\sigma]}^s + q[\sigma] \left[(\mathbf{1} - \varpi[\sigma]) - \pi[\sigma] \right] \\ &\quad - q[\sigma] \left[(\mathbf{1} - \varpi[\sigma]) - \pi[\sigma] \right] \overbrace{p[\sigma]}^{md[\sigma]} \overbrace{p[\sigma]}^s \end{aligned} \quad (\text{IV-4})$$

Pour obtenir (IV-2) il ne reste plus qu'à utiliser les relations (III-61) et (II-19).

Corollaire. — D'après (II-18) et (III-1), on déduit de (IV-2) :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^{d[\sigma]} \frac{v[S_c](m+s) - (m+s)q[\sigma]\pi[\sigma]}{d[\sigma]} = w[\sigma] + v(0)\pi[\sigma] \quad (\text{IV-5})$$

Théorème 2. — Pour toute stratégie $S_c \in \mathcal{S}_c$, soit $l[S_c]$ le P.P.C.M. de $d[S_c(1)]$ et $d[\tilde{\sigma}^{v(0)}]$. Si $\tilde{S}_c^{v(0)}$ est la stratégie de S_c telle que

$$\tilde{S}_c^{v(0)}(m) = \tilde{\sigma}^{v(0)} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad (\text{IV-6})$$

on a :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^{l[S_c]} \frac{v[\tilde{S}_c^{v(0)}](m+s) - v[S_c](m+s)}{l[S_c]} \geq 0 \quad \forall S_c \in \mathcal{S}_c \quad (\text{IV-7})$$

(la limite pouvant être finie ou infinie).

Démonstration. — Posons $\sigma = S_c(1)$. D'après (IV-5), on a, pour tout $i = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^{l[S_c]} \frac{v_i[\tilde{S}_c^{v(0)}](m+s) - v_i[S_c](m+s)}{l[S_c]} \\ = \lim_{m \rightarrow \infty} m(q[\tilde{\sigma}^{v(0)}]\pi_i[\tilde{\sigma}^{v(0)}] - q[\sigma]\pi_i[\sigma]) \\ + \frac{1 + 2 + \dots + l[S_c]}{l[S_c]} (q[\tilde{\sigma}^{v(0)}]\pi_i[\tilde{\sigma}^{v(0)}] - q[\sigma]\pi_i[\sigma]) \\ + (w_i[\tilde{\sigma}^{v(0)}] + v(0)\pi_i[\tilde{\sigma}^{v(0)}]) - (w_i[\sigma] + v(0)\pi_i[\sigma]) \end{aligned} \quad (\text{IV-8})$$

Si $q[\tilde{\sigma}^{v(0)}]\pi_i[\tilde{\sigma}^{v(0)}]$ est strictement supérieur à $q[\sigma]\pi_i[\sigma]$, le premier terme du second membre de (IV-8) est égal à $+\infty$. Et si $q[\tilde{\sigma}^{v(0)}]\pi_i[\tilde{\sigma}^{v(0)}]$ n'est pas strictement supérieur à $q[\sigma]\pi_i[\sigma]$, l'inégalité (III-30) prouve qu'alors les deux premiers termes du second membre de (IV-8) sont nuls, et que le troisième est supérieur ou égal à 0. On en déduit (IV-7).

REMARQUE. — En général il n'existe pas une stratégie constante, $\tilde{S}_c$, telle que, pour tout $S_c \in \mathcal{S}_c$, on ait :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [v[\tilde{S}_c](ml'[\tilde{S}_c] + s) - v[S_c](ml'[S_c] + s)] \geq 0 \quad \forall s = 0, \dots, l'[S_c] - 1 \quad (\text{IV-9})$$

$l'[S_c]$ étant le P.P.C.M. de $d[\tilde{S}_c(1)]$ et de $d(S_c(1))$ (exemple 1).

V. — PREMIERS RESULTATS SUR L'ETUDE ASYMPTOTIQUE DE $\tilde{v}$

Pour simplifier l'écriture, posons :

$$g = q[\tilde{\sigma}^0]\pi[\tilde{\sigma}^0] = \sup_{\sigma \in \mathfrak{S}} q[\sigma]\pi[\sigma] \quad (\text{V-1})$$

(0 étant le vecteur nul de $(\mathbf{R}^n)'$). Soit $\mathfrak{S}_0$ l'ensemble des tactiques telles que :

$$q[\sigma]\pi[\sigma] = g \quad (\text{V-2})$$

et posons :

$$I = \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_0} I[\sigma] \quad \text{et} \quad I' = \mathfrak{G}I \quad (\text{V-3})$$

Quel que soit le vecteur x de $(\mathbf{R}^n)'$, les tactiques $\tilde{\sigma}^x$ appartiennent à $\mathfrak{S}_0$. Plus précisément (remarque 2 au théorème 1), pour que σ appartienne à $\mathfrak{S}_0$, il faut et il suffit que :

$$\begin{cases} gp[\sigma] = g \\ g_i + w_i[\tilde{\sigma}^0] = q_i[\sigma(i)] + w[\tilde{\sigma}^0]p_i[\sigma(i)] \quad \forall i \in I[\sigma] \end{cases} \quad (\text{V-4})$$

REMARQUE. — Étant donné une tactique $\sigma \in \mathfrak{S}$, soit, pour tout i appartenant à I_0 , $K'_i(\sigma)$ l'ensemble des commandes $k \in K_i$ qui maximisent lexicographiquement le 2-uple :

$$\begin{bmatrix} q[\sigma]\pi[\sigma]p_i[k] \\ q_i[k] + w[\sigma]p_i[k] \end{bmatrix}$$

et soit ψ la multi-application de $\mathfrak{S}$ dans $\mathfrak{S}$ telle que :

$$\psi(\sigma) = \{ \tau \in \mathfrak{S} \mid \tau(i) \in K'_i(\sigma) \quad \forall i \in I_0, \quad \text{et} : \quad \tau(i) = \sigma(i) \quad \text{si} \quad \sigma(i) \in K'_i(\sigma) \} \quad (\text{V-5})$$

R. A. Howard a montré dans [7] que tout point fixe de ψ appartient à $\mathfrak{S}_0$, et que si τ vérifie $\tau \in \psi(\tau)$, une condition nécessaire et suffisante pour qu'une tactique σ appartienne à $\mathfrak{S}_0$ est que :

$$\begin{cases} gp[\sigma] = g \\ g_i + w_i[\tau] = q_i[\sigma] + w[\tau]p_i[\sigma] \quad \forall i \in I[\sigma] \end{cases} \quad (\text{V-6})$$

On remarquera toutefois qu'un point fixe de ψ n'est pas nécessairement un point fixe de φ^0 ; autrement dit :

$$\tau \in \psi(\tau) \not\Rightarrow w[\tau] \geq w[\sigma] \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_0 \quad (\text{V-7})$$

(exemple 2).

Proposition 3. — Soit $\sigma \in \mathfrak{S}$. Si x vérifie l'une des deux relations équivalentes suivantes :

$$q[\sigma] + xp[\sigma] = q[\sigma]\pi[\sigma] + x \quad (\text{V-8})$$

$$x = w[\sigma] + x\pi[\sigma] \quad (\text{V-9})$$

on a, pour tout m et pour tout r appartenant à $\mathbb{N}$:

$$\tilde{v}(m+r) - (m+r)q[\sigma]\pi[\sigma] - x \geq (\tilde{v}(m) - mq[\sigma]\pi[\sigma] - x)\overbrace{p[\sigma]}^r \quad (\text{V-10})$$

Démonstration. — On a :

$$\tilde{v}(m+1) = \sup_{\tau \in \mathfrak{S}} (q[\tau] + \tilde{v}(m)p[\tau])$$

$$\geq q[\sigma] + \tilde{v}(m)p[\sigma] \quad (\text{V-11})$$

$$\geq q[\sigma] + (mq[\sigma]\pi[\sigma] + x)p[\sigma] + (\tilde{v}(m) - mq[\sigma]\pi[\sigma] - x)p[\sigma]$$

et par conséquent :

$$\tilde{v}(m+1) - (m+1)q[\sigma]\pi[\sigma] - x \geq (\tilde{v}(m) - mq[\sigma]\pi[\sigma] - x)p[\sigma] \quad (\text{V-12})$$

c'est l'inégalité cherchée dans le cas $r = 1$. Pour l'obtenir dans le cas r quelconque, on opère par récurrence : la relation (V-10) étant supposée vraie pour r , on multiplie les deux membres par $p[\sigma]$ et on récrit d'autre part l'inégalité (V-12) en remplaçant m par $m+r$.

Proposition 4. — Soit $x \in (\mathbb{R}^n)'$, et considérons le vecteur $\tilde{x}$ défini en (III-65). Il existe un entier M^x et un nombre strictement positif c^x , tels que pour tout $i \in I_0$, et pour tout $k \in K_i$, l'une des deux relations suivantes soit vraie quel que soit $m \geq M^x$:

$$\bullet \quad q_i[\tilde{\sigma}^x] + (mg + \tilde{x})p_i[\tilde{\sigma}^x] \geq q_i[k] + (mg + \tilde{x})p_i[k] + c^x \quad (\text{V-13})$$

$$\bullet \quad q_i[\tilde{\sigma}^x] + (mg + \tilde{x})p_i[\tilde{\sigma}^x] = q_i[k] + (mg + \tilde{x})p_i[k] \quad (\text{V-14})$$

Démonstration. — Pour tout $i \in I_0$, et pour tout $k \in K_i$ soit $\zeta'_i[k]$ et $\eta'_i[k]$ les nombres définis par les relations :

$$gp_i[\tilde{\sigma}^x] = gp_i[k] + \zeta'_i[k] \quad (\text{V-15})$$

$$q_i[\tilde{\sigma}^x] + \tilde{x}p_i[\tilde{\sigma}^x] = q_i[k] + \tilde{x}p_i[k] + \eta'_i[k] \quad (\text{V-16})$$

D'après (III-33), (III-34) et (III-36), on a :

$$\begin{bmatrix} \zeta'_i[k] \\ \eta'_i[k] \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall i \in I_0 \quad \forall k \in K_i \quad (\text{V-17})$$

Pour obtenir le résultat cherché, il suffit de prendre :

$$c^x = \min \{ \eta'_i[k] \mid i \in I_0, k \in K_i, \zeta'_i[k] = 0, \eta'_i[k] \neq 0 \} \quad (\text{V-18})$$

$$M^x = \text{Min} \{ m \in \mathbb{N} \mid m\zeta'_i[k] + \eta'_i[k] \geq c^x \forall i \in I_0, \forall k \in K_i \text{ tels que } \zeta'_i[k] > 0 \} \quad (\text{V-19})$$

Proposition 5. — Pour $m \geq M^0$ et r quelconque, on a :

$$\begin{aligned} & (\tilde{v}(m) - mg - w[\tilde{\sigma}^0])p[\tilde{S}(m+1)] \dots p[\tilde{S}(m+r)] \\ & \geq \tilde{v}(m+r) - (m+r)g - w[\tilde{\sigma}^0] \geq (\tilde{v}(m) - mg - w[\tilde{\sigma}^0])\overbrace{p[\tilde{\sigma}^0]}^r \quad (\text{V-20}) \end{aligned}$$

Démonstration. — La seconde inégalité de (V-20) est un cas particulier de la proposition 3. Démontrons la première. On a :

$$\begin{aligned} \tilde{v}(m+1) &= q[\tilde{S}(m+1)] + \tilde{v}(m)p[\tilde{S}(m+1)] \\ &= q[\tilde{S}(m+1)] + (mg + w[\tilde{\sigma}^0])p[\tilde{S}(m+1)] \\ &\quad + (\tilde{v}(m) - mg - w[\tilde{\sigma}^0])p[\tilde{S}(m+1)] \quad (\text{V-21}) \end{aligned}$$

Pour $m \geq M^0$, on en déduit (proposition 4) :

$$\tilde{v}(m+1) - (m+1)g - w[\tilde{\sigma}^0] \leq (\tilde{v}(m) - mg - w[\tilde{\sigma}^0])p[\tilde{S}(m+1)] \quad (\text{V-22})$$

La première inégalité est ainsi démontrée dans le cas $r = 1$. On la démontre alors pour r quelconque par récurrence (cf. démonstration de la proposition 3).

Proposition 6. — La suite $m \mapsto \tilde{v}(m) - mg$ est bornée.

Démonstration. — Posons :

$$\alpha = \|\tilde{v}(M^0) - M^0g - w[\tilde{\sigma}^0]\| \quad (\text{V-23})$$

Comme toutes les matrices $p[\sigma]$ sont stochastiques, il résulte de la proposition 5 que pour $m \geq M^0$, la suite $m \mapsto (\tilde{v}(m) - mg - w[\tilde{\sigma}^0])$ est à valeurs dans le pavé $[-\alpha, +\alpha]^n$. La proposition en découle immédiatement.

REMARQUE. — Il est possible de montrer que la suite $m \mapsto \tilde{v}(m) - mg$ est bornée sans utiliser le théorème 1 : on peut en effet remplacer dans les propositions 4 et 5 la tactique $\tilde{\sigma}^0$ par un quelconque point fixe de la multi-application ψ définie en (V-5).

Proposition 7. — Soit $i \in I$, et soit $\sigma \in \mathfrak{S}_0$. Si i appartient à $J[\sigma](\lambda)$, les différentes suites

$$m \mapsto \tilde{v}_i(m\rho[\sigma](\lambda) + s) - (m\rho[\sigma](\lambda) + s)g_i$$

pour $s = 0, \dots, \rho[\sigma](\lambda) - 1$, sont convergentes.

Démonstration. — Pour simplifier l'écriture, posons :

$$J = J[\sigma](\lambda) \quad \rho = \rho[\sigma](\lambda) \quad (\text{V-24})$$

En raison de la proposition 6, il suffit de montrer que si $x(s)$ et $y(s)$ sont deux points d'accumulation de la suite $m \mapsto \tilde{v}(m\rho + s) - (m\rho + s)g$, on a :

$$x_i(s) = y_i(s) \quad \forall i \in J \quad (\text{V-25})$$

D'après la proposition 3, on a :

$$\begin{aligned} \tilde{v}((m+r)\rho + s) - ((m+r)\rho + s)g - w[\sigma] \\ \geq [\tilde{v}(m\rho + s) - (m\rho + s)g - w[\sigma]] \overbrace{p[\sigma]}^{r\rho} \end{aligned} \quad (\text{V-26})$$

Mais la structure de la matrice $p[\sigma]$ est telle (fig. 1) que :

$$\overbrace{p_J^J[\sigma]}^{r\rho} = \left[\overbrace{p[\sigma]}^{r\rho} \right]_J^J \quad \forall r \in \mathbb{N} \quad (\text{V-27})$$

et que, en désignant par J' le complémentaire de J :

$$\left[\overbrace{p[\sigma]}^{r\rho} \right]_J^{J'} = 0 \quad \forall r \in \mathbb{N} \quad (\text{V-28})$$

Dans ces conditions, on déduit de (V-26) :

$$\begin{aligned} \tilde{v}((m+r)\rho + s) - ((m+r)\rho + s)g - w[\sigma]_J \\ \geq [\tilde{v}(m\rho + s) - (m\rho + s)g - w[\sigma]]_J \overbrace{p_J^J[\sigma]}^{r\rho} \end{aligned} \quad (\text{V-29})$$

Or $\overbrace{p_J^J[\sigma]}^{\rho}$ est une matrice stochastique primitive ; aussi, d'après (II-19), et (V-27) :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \overbrace{p_J^J[\sigma]}^{r\rho} = \overbrace{\pi_J^J[\sigma]}^{(\rho)} \quad (\text{V-30})$$

Par conséquent, en faisant tendre convenablement r vers l'infini dans (V-29), il vient :

$$[x(s) - w[\sigma]]_J \geq [\tilde{v}(m\rho + s) - (m\rho + s)g - w[\sigma]]_J \overbrace{\pi_J^J[\sigma]}^{(\rho)} \quad (\text{V-31})$$

inégalité qui est vraie quel que soit $m \in \mathbb{N}$. En faisant tendre m convenablement vers l'infini, on en déduit :

$$[x(s) - w[\sigma]]_J \geq [y(s) - w[\sigma]]_J \overbrace{\pi_J^J[\sigma]}^{(\rho)} \quad (\text{V-32})$$

Le même raisonnement permet d'obtenir aussi :

$$[x(s) - w[\sigma]]_J \geq [x(s) - w[\sigma]]_J \overbrace{\pi_J^J[\sigma]}^{(\rho)} \quad (\text{V-33})$$

$$[y(s) - w[\sigma]]_J \geq [x(s) - w[\sigma]]_J \overbrace{\pi_J^J[\sigma]}^{(\rho)} \quad (\text{V-34})$$

$$[y(s) - w[\sigma]]_J \geq [y(s) - w[\sigma]]_J \overbrace{\pi_J^J[\sigma]}^{(\rho)} \quad (\text{V-35})$$

Mais le lemme 2 et (II-14) montrent qu'en fait (V-33) et (V-35) sont des égalités; (V-32) et (V-34) peuvent donc s'écrire :

$$[x(s) - w[\sigma]]_J \geq [y(s) - w[\sigma]]_J \quad (\text{V-36})$$

$$[y(s) - w[\sigma]]_J \geq [x(s) - w[\sigma]]_J \quad (\text{V-37})$$

ce qui prouve que $x_J(s)$ et $y_J(s)$ sont égaux, et la démonstration est terminée.

Proposition 8. — Soit $i \in I$. Si θ_1 et θ_2 sont deux entiers tels que les différentes suites

$$m \mapsto \tilde{v}_i(m\theta_1 + r) - (m\theta_1 + r)g_i$$

$$m \mapsto \tilde{v}_i(m\theta_2 + s) - (m\theta_2 + s)g_i$$

pour $r = 0, \dots, \theta_1 - 1$ et $s = 0, \dots, \theta_2 - 1$ soient convergentes, toutes les suites

$$m \mapsto \tilde{v}_i(m\theta + h) - (m\theta + h)g_i$$

où θ est le P.G.C.D. de θ_1 et θ_2 et où $h \in \{0, \dots, \theta - 1\}$ sont convergentes.

Il s'agit de la transcription au présent contexte d'une propriété générale des suites.

Proposition 9. — Soit $i \in I$ et $\rho' \in \mathbb{N}$ tels que les différentes suites

$$m \mapsto \tilde{v}_i(m\rho' + s) - (m\rho' + s)g_i$$

pour $s = 0, \dots, \rho' - 1$ soient convergentes. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_0$ telle que i appartienne à $I[\sigma]$. Si J est la classe finale du graphe $(I_0, \gamma[\sigma])$ contenant i , et si ρ est la période de J , toutes les suites :

$$m \mapsto \tilde{v}_j(m\theta + t) - (m\theta + t)g_j$$

où θ est le P.G.C.D. de ρ et ρ' , et où $t \in \{0, \dots, \theta - 1\}$, sont convergentes dans $(\mathbf{R}^J)'$.

Démonstration. — Pour tout $l \in \mathbb{Z}$, soit $\bar{l}$ l'élément de la classe résiduelle de l modulo ρ compris entre 0 et $\rho - 1$. Par ailleurs, pour tout $s = 0, \dots, \rho - 1$ soit $x(s)$ le vecteur de $(\mathbf{R}^n)'$ tel que :

$$x_j(s) = \begin{cases} \lim_{m \rightarrow \infty} (\tilde{v}_j(m\rho + s) - (m\rho + s)g_j) & \text{si } j \in J \\ 0 & \text{si } j \notin J \end{cases} \quad (\text{V-38})$$

D'après la proposition 3, et puisque J est une classe finale du graphe $(I_0, \gamma[\sigma])$, on a pour tout s et s' compris entre 0 et $\rho - 1$:

$$\begin{aligned} & [\tilde{v}((m+r)\rho + s) - ((m+r)\rho + s)g - w[\sigma]]_J \\ & \geq [\tilde{v}(m\rho + s') - (m\rho + s')g - w[\sigma]]_J \quad \overbrace{p_J^J[\sigma]}^{(r-1)\rho} \quad \overbrace{p_J^J[\sigma]}^{\rho+s-s'} \end{aligned} \quad (\text{V-39})$$

En passant à la limite quand m et r tendent vers l'infini, il vient :

$$[x(s) - w[\sigma]]_J \geq [x(s') - w[\sigma]]_J \overline{\pi^{(\rho)}_J[\sigma] p'_J[\sigma]}^{\overline{s-s'}} \quad (\text{V-40})$$

Si on intervertit s et s' , on obtient de la même façon :

$$[x(s') - w[\sigma]]_J \geq [x(s) - w[\sigma]]_J \overline{\pi^{(\rho)}_J[\sigma] p'_J[\sigma]}^{\overline{s'-s}} \quad (\text{V-41})$$

Par une démonstration analogue à celle du lemme 2, et compte tenu de (II-14), on montre alors que (V-40) et (V-41) sont en fait des égalités :

$$[x(s) - w[\sigma]]_J = [x(s') - w[\sigma]]_J \overline{\pi^{(\rho)}_J[\sigma] p'_J[\sigma]}^{\overline{s-s'}} \quad \forall s, s' = 0, \dots, \rho - 1 \quad (\text{V-42})$$

Soit $L(0), \dots, L(\rho - 1)$ les sous-classes de J . Comme ce sont aussi les classes finales du graphe associé à la matrice stochastique $\overline{p'_J[\sigma]}^{\overline{\rho}}$, les colonnes de chacune des matrices $\overline{\pi^{(\rho)}_{L(r)}}^{\overline{\rho}}$ sont égales. Par conséquent, il résulte de (V-42), en faisant $s' = s$, que pour tout $s = 0, \dots, \rho - 1$ et pour tout $r = 0, \dots, \rho - 1$, il existe $y(s, r) \in \mathbf{R}$ tel que :

$$x_j(s) - w_j[\sigma] = y(s, r) \quad \forall j \in L(r) \quad (\text{V-43})$$

et aussi (fig. 2) que :

$$y(s, r) = y(s', \overline{r + s - s'}) \quad \forall s, s', r = 0, \dots, \rho - 1 \quad (\text{V-44})$$

ce qui s'écrit encore :

$$\overline{s - s'} = \overline{r' - r} \Rightarrow y(s, r) = y(s', r') \quad (\text{V-45})$$

Ce résultat préliminaire étant acquis, démontrons maintenant la proposition. Posons $\rho = a\theta$. Tout revient à montrer que pour tout $t = 0, \dots, \theta - 1$ les a vecteurs de $(\mathbf{R}^a)'$, $x(t), x(\theta + t), \dots, x((a - 1)\theta + t)$ sont égaux, ou encore :

$$y(t', r') = y(\theta + t', r') = \dots = y((a - 1)\theta + t', r') \quad (\text{V-46})$$

$$\forall t' = 0, \dots, \theta - 1 \quad \forall r' = 0, \dots, \rho - 1$$

Or, en raison de la proposition 8, on sait déjà que :

$$x_i(t) = x_i(\theta + t) = \dots = x_i((a - 1)\theta + t) \quad \forall t = 0, \dots, \theta - 1 \quad (\text{V-47})$$

et par conséquent, si $L(r)$ est la sous-classe à laquelle appartient i :

$$y(t, r) = y(\theta + t, r) = \dots = y((a - 1)\theta + t, r) \quad \forall t = 0, \dots, \theta - 1 \quad (\text{V-48})$$

Comme il est évident que (V-46) se déduit de (V-48) d'après (V-45), la démonstration est terminée.

Proposition 10. — Sur I , considérons la relation binaire $\mathcal{R}$ suivante :

$$i\mathcal{R}j \iff \left\{ \begin{array}{l} \exists \sigma \in \mathfrak{S}_0 \\ \exists \lambda \in \{1, \dots, \nu[\sigma]\} \end{array} \right. \text{ tels que } \left\{ \begin{array}{l} i \in J[\sigma](\lambda) \\ \text{et } j \in J[\sigma](\lambda) \end{array} \right. \quad (\text{V-49})$$

et soit $J(1), \dots, J(\nu)$ les classes d'équivalence de la fermeture transitive $\hat{\mathcal{R}}$ de $\mathcal{R}$. Pour tout $l = 1, \dots, \nu$, posons :

$$\rho(l) = \text{P.G.C.D.} \{ \rho[\sigma](\lambda) \mid J[\sigma](\lambda) \subset J(l) \text{ et } \sigma \in \mathfrak{S}_0 \} \quad (\text{V-50})$$

Dans ces conditions, les différentes suites :

$$m \mapsto [\tilde{v}(m\rho(l) + h) - (m\rho(l) + h)g]_{J(l)}$$

pour $h = 0, \dots, \rho(l) - 1$, sont convergentes dans $(\mathbf{R}^{J(l)})'$, et ceci quel que soit $l = 1, \dots, \nu$.

Dire que i et j sont liés par la relation $\mathcal{R}$ signifie qu'il existe une tactique σ appartenant à $\mathfrak{S}_0$, pour laquelle i et j sont deux états finals appartenant à la même classe finale $J[\sigma](\lambda)$. Rappelons en outre que les ensembles I et $\mathfrak{S}_0$ ont été définis au début de ce paragraphe V.

Démonstration. — Soit σ_1 et σ_2 deux tactiques de $\mathfrak{S}_0$, et λ_1 et λ_2 tels que :

$$J[\sigma_1](\lambda_1) \cap J[\sigma_2](\lambda_2) \neq \emptyset \quad (\text{V-51})$$

Soit i un élément de cette intersection. D'après la proposition 7 toutes les suites

$$m \mapsto \tilde{v}_i(m\rho[\sigma_1](\lambda_1) + r) - (m\rho[\sigma_1](\lambda_1) + r)g_i$$

$$m \mapsto \tilde{v}_i(m\rho[\sigma_2](\lambda_2) + s) - (m\rho[\sigma_2](\lambda_2) + s)g_i$$

pour $r = 0, \dots, \rho[\sigma_1](\lambda_1) - 1$ et $s = 0, \dots, \rho[\sigma_2](\lambda_2) - 1$ convergent.

Donc, d'après la proposition 8, les différentes suites :

$$m \mapsto \tilde{v}_i(m\theta + t) - (m\theta + t)g_i$$

où θ est le P.G.C.D. de $\rho[\sigma_1](\lambda_1)$ et $\rho[\sigma_2](\lambda_2)$, et $t \in \{0, \dots, \theta - 1\}$ sont convergentes. Il en résulte, d'après la proposition 9, que toutes les suites

$$m \mapsto \tilde{v}_j(m\theta + t) - (m\theta + t)g_j$$

pour $t = 0, \dots, \theta - 1$ convergent quel que soit $j \in J[\sigma_1](\lambda_1) \cup J[\sigma_2](\lambda_2)$.

Compte tenu de la définition de $\hat{\mathcal{R}}$, on en déduit que pour tout $l = 1, \dots, \nu$, les différentes suites

$$m \mapsto [\tilde{v}(m\rho(l) + h) - (m\rho(l) + h)g]_{J(l)}$$

pour $h = 0, \dots, \rho(l) - 1$ sont convergentes dans $(\mathbf{R}^{J(l)})'$.

Corollaire. — Soit d le P.P.C.M. des nombres $\rho(l) (l = 1, \dots, \nu)$. Pour tout $s = 0, \dots, d-1$, posons :

$$z_i(s) = \begin{cases} \lim_{m \rightarrow \infty} [\tilde{v}_i(m\rho(l) + s) - (m\rho(l) + s)g_i] & \text{si } i \in J(l) \\ 0 & \text{si } i \in I' \end{cases} \quad (\text{V-52})$$

Alors les différentes suites

$$m \mapsto [\tilde{v}(md + s) - (md + s)g]_I$$

pour $s = 0, \dots, d-1$ convergent respectivement vers $z_I(0), \dots, z_I(d-1)$, dans $(\mathbf{R}^I)'$.

Démonstration. — Comme pour tout $i \in I$, la suite :

$$m \mapsto \tilde{v}_i(md + s) - (md + s)g_i$$

est une suite partielle de toutes les suites

$$m \mapsto \tilde{v}_i(m\rho(l) + s) - (m\rho(l) + s)g_i$$

pour $l = 1, \dots, \nu$, on a :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [\tilde{v}(md + s) - (md + s)g]_i = z_i(s) \quad \forall s = 0, \dots, d-1 \quad (\text{V-53})$$

C'est le résultat cherché. Notons toutefois que les vecteurs $z(s)$ n'interviennent que par leur projection sur $(\mathbf{R}^I)'$. On aurait donc pu fixer $z_i(s)$ pour $i \in I'$ par n'importe quelle autre valeur que 0.

REMARQUE. — Il est possible de démontrer le résultat suivant, qui est une interprétation de la relation d'équivalence $\hat{\mathcal{R}}$ introduite à la proposition 10. Pour tout $i \in I$, soit $\mathfrak{S}(i)$ l'ensemble des tactiques σ appartenant à $\mathfrak{S}_0$ pour lesquelles i est un état final, et soit (I_0, γ) le graphe dont l'ensemble des sommets est I_0 et qui à tout $i \in I_0$ associe la partie $\gamma(i)$ de I_0 telle que :

$$\gamma(i) = \begin{cases} \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}(i)} \gamma[\sigma](i) & \text{si } i \in I \\ \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_0} \gamma[\sigma](i) & \text{si } i \notin I \end{cases} \quad (\text{V-54})$$

Les classes finales de ce graphe sont les ensembles $J(1), \dots, J(\nu)$, et leur période respective est $\rho(1), \dots, \rho(\nu)$.

VI. — NOUVELLE FORMULATION DU PROBLEME

L'objet du paragraphe V a été de montrer que la suite $(\tilde{v}(m) - mg)_I$ admet une famille de d points d'accumulation $z_I(0), \dots, z_I(d-1)$ distincts ou confondus. Pour se ramener au cas d'une suite convergente, on va désormais opérer sur un nouveau système, $\mathcal{C}$, à dn états.

Pour tout entier (positif) l , soit $\bar{l}$ le reste dans la division de l par d , et soit $E(l)$ (resp. $l^\#$) le quotient (resp. le reste) dans la division de l par n :

$$l \equiv \bar{l} \pmod{d} \quad \text{avec} \quad 0 \leq \bar{l} < d \quad (\text{VI-1})$$

$$l = E(l)n + l^\# \quad \text{avec} \quad 0 \leq l^\# < n \quad (\text{VI-2})$$

Soit $\mathbf{I}_0 = \{1, \dots, dn\}$ le nouvel ensemble des états. Pour chaque $i \in \mathbf{I}_0$, l'ensemble des commandes admissibles en i , $\mathbf{K}_i$, est égal à l'ensemble $K_{i^\#}$, et pour $i \in \mathbf{I}_0$ et $j \in \mathbf{I}_0$, la probabilité de la transition de i à j (resp. le gain associé à cette même transition) pour la commande $k \in \mathbf{K}_i$ est définie par :

$$P_i^j[k] = \begin{cases} p_{i^\#}^{j^\#}[k] & \text{si} \quad E(j) = \overline{E(i) - 1} \\ 0 & \text{si} \quad E(j) \neq \overline{E(i) - 1} \end{cases} \quad (\text{VI-3})$$

(resp.

$$R_i^j[k] = \begin{cases} r_{i^\#}^{j^\#}[k] & \text{si} \quad E(j) = \overline{E(i) - 1} \\ 0 & \text{si} \quad E(j) \neq \overline{E(i) - 1} \end{cases} \quad (\text{VI-4})$$

Alors le gain moyen obtenu dans la transition à partir de l'état i sous l'effet de la commande k , pour le système $\mathbf{C}$, est :

$$Q_i[k] = \sum_{j=1}^{dn} P_i^j[k] R_i^j[k] = q_{i^\#}[k] \quad (\text{VI-5})$$

Soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble des tactiques du système $\mathbf{C}$. Il s'identifie à l'ensemble $\mathfrak{S}^d$ car toute tactique $\Sigma \in \mathfrak{S}$ est caractérisée par les tactiques $\Sigma_0, \dots, \Sigma_{d-1}$ appartenant à $\mathfrak{S}$ telles que :

$$\Sigma(i) = \Sigma_{E(i)}(i^\#) \quad \forall i \in \mathbf{I}_0 \quad (\text{VI-6})$$

A toute tactique $\Sigma \in \mathfrak{S}$ est associée la matrice stochastique $P[\Sigma]$ telle que (fig. 4) :

$$P[\Sigma] = (P_i^j[\Sigma(i)])_{\substack{j=1, \dots, dn \\ i=1, \dots, dn}} \quad (\text{VI-7})$$

Il lui est aussi associé le vecteur des gains moyens obtenus en une transition :

$$Q[\Sigma] = (Q_i[\Sigma(i)])_{i=1, \dots, dn} \quad (\text{VI-8})$$

En liaison avec les notations adoptées aux § II et III, le graphe associé à la matrice stochastique $P[\Sigma]$ sera noté $(\mathbf{I}_0, \Gamma[\Sigma])$. On désignera par $\mathbf{I}[\Sigma]$ (resp. $\mathbf{I}'[\Sigma]$) l'ensemble des états finals (resp. transitoires) de $(\mathbf{I}_0, \Gamma[\Sigma])$, et par $D[\Sigma]$ le P.P.C.M. des périodes des classes finales de $(\mathbf{I}_0, \Gamma[\Sigma])$. On appellera $\Pi[\Sigma]$ (resp. $\Pi^{(t)}[\Sigma]$) le projecteur spectral associé à la valeur propre 1 de la matrice

$P[\Sigma]$ (resp. $\overbrace{P[\Sigma]}^I$) ; $W[\Sigma]$ (resp. $\Omega^X[\Sigma]$, pour $X \in (\mathbf{R}^{dn})'$) sera le vecteur de $(\mathbf{R}^{dn})'$ défini par les relations :

$$\begin{cases} W[\Sigma]\Pi[\Sigma] = 0 \\ Q[\Sigma] + W[\Sigma]P[\Sigma] = Q[\Sigma]\Pi[\Sigma] + W[\Sigma] \end{cases} \quad (\text{VI-9})$$

(resp.

$$\begin{cases} \Omega^X[\Sigma]\Pi[\Sigma] = 0 \\ X - W[\Sigma] + \Omega^X[\Sigma]P[\Sigma] = (X - W[\Sigma])\Pi[\Sigma] + \Omega^X[\Sigma] \end{cases} \quad (\text{VI-10})$$

Évidemment, la proposition 1 et le théorème 1 s'appliquent ici : soit $\Sigma \in \mathfrak{S}$; pour tout $i \in \mathbf{I}_0$, soit $\mathbf{K}_i^X(\Sigma)$ l'ensemble des commandes $k \in \mathbf{K}_i$ qui maximisent lexicographiquement le 3-uple :

$$\begin{bmatrix} Q[\Sigma]\Pi[\Sigma]P_i[k] \\ Q_i[k] + (W[\Sigma] + X\Pi[\Sigma])P_i[k] \\ \Omega^X[\Sigma]P_i[k] \end{bmatrix}$$

La multi-application Φ^X de $\mathfrak{S}$ dans $\mathfrak{S}$ définie par :

$$\Phi^X(\Sigma) = \{ T \in \mathfrak{S} \mid T(i) \in \mathbf{K}_i^X(\Sigma) \quad \forall i \in \mathbf{I}_0, \text{ et : } T(i) = \Sigma(i) \text{ si } \Sigma(i) \in \mathbf{K}_i^X(\Sigma) \} \quad (\text{VI-11})$$

est telle que :

$$T \in \Phi^X(\Sigma) \quad \text{et} \quad T \neq \Sigma \quad \Rightarrow \quad T \succ \Sigma \quad (\text{VI-12})$$

De plus, si $\tilde{\Sigma}^X$ est un point fixe de la multi-application Φ^X , on a :

$$\begin{bmatrix} Q[\tilde{\Sigma}^X]\Pi_i[\tilde{\Sigma}^X] \\ W_i[\tilde{\Sigma}^X] + X\Pi_i[\tilde{\Sigma}^X] \end{bmatrix} \succcurlyeq \begin{bmatrix} Q[\Sigma]\Pi_i[\Sigma] \\ W_i[\Sigma] + X\Pi_i[\Sigma] \end{bmatrix} \quad \forall i \in \mathbf{I}_0 \quad \forall \Sigma \in \mathfrak{S} \quad (\text{VI-13})$$

Par la suite, $\tilde{\Sigma}^X$ désignera un point fixe de Φ^X , choisi arbitrairement, mais fixé une fois pour toutes.

Là aussi, on pose pour tout $X \in (\mathbf{R}^{dn})'$:

$$\begin{cases} X[\Sigma] = W[\Sigma] + X\Pi[\Sigma] & \forall \Sigma \in \mathfrak{S} \end{cases} \quad (\text{VI-14})$$

$$\begin{cases} \tilde{X} = X[\tilde{\Sigma}^X] \end{cases} \quad (\text{VI-15})$$

Proposition 11. — Soit $\sigma \in \mathfrak{S}$, et soit Σ la tactique de $\mathfrak{S}$ telle que :

$$\Sigma_s = \sigma \quad \forall s = 0, \dots, d-1 \quad (\text{VI-16})$$

la matrice $\Pi[\Sigma]$ se partitionne de la façon indiquée par la figure 5. De plus, on a :

$$Q[\Sigma]\Pi_i[\Sigma] = q[\sigma]\pi_i\#\sigma \quad \forall i \in \mathbf{I}_0 \quad (\text{VI-17})$$

$$W_i[\Sigma] = w_i\#\sigma \quad \forall i \in \mathbf{I}_0 \quad (\text{VI-18})$$

$$\Omega_i^0[\Sigma] = \omega_i^0[\sigma] \quad \forall i \in I_0 \quad (\text{VI-19})$$

$$I[\Sigma] = \bigcup_{s=0}^{d-1} (sn + I[\sigma]) = \{ sn + j \mid s = 0, \dots, d-1 \text{ et } j \in I[\sigma] \} \quad (\text{VI-20})$$

Démonstration. — En faisant $t = d$ dans (II-18), on en déduit la partition de $\Pi[\Sigma]$, puis (VI-17), et aussi (VI-20) car $I'[\sigma]$ est caractérisé par l'une quelconque des relations :

$$j \in I'[\sigma] \iff \pi^{(t)}[\sigma] (\widehat{p[\sigma]}^s)^j = 0 \quad (\text{VI-21})$$

où $t \in \mathbb{N}$, et où $s \in \{0, \dots, t-1\}$.

D'autre part, l'unicité de $W[\Sigma]$ implique (VI-18), car le vecteur Y de $(\mathbb{R}^{dn})'$ défini par :

$$Y_i = w_i[\sigma] \quad \forall i \in I_0 \quad (\text{VI-22})$$

vérifie d'après (II-18), (III-1) et (VI-17) :

$$\begin{cases} Y\Pi[\Sigma] = 0 \\ Q[\Sigma] + YP[\Sigma] = Q[\Sigma]\Pi[\Sigma] + Y \end{cases} \quad (\text{VI-23})$$

Enfin, on démontre (VI-19) de la même façon que (VI-18).

Corollaire. — Soit G le vecteur de $(\mathbb{R}^{dn})'$ tel que :

$$G_i = g_i \quad \forall i \in I_0 \quad (\text{VI-24})$$

On a :

$$\sup_{\Sigma \in \mathfrak{S}} Q[\Sigma]\Pi[\Sigma] = G \quad (\text{VI-25})$$

En effet, d'après la proposition 11, la tactique $\tilde{\Sigma}^0$ de $\mathfrak{S}$ telle que :

$$\tilde{\Sigma}_s^0 = \tilde{\sigma}^0 \quad \forall s = 0, \dots, d-1 \quad (\text{VI-26})$$

est un point fixe de la multi-application Φ^0 .

Proposition 12. — Soit $\mathfrak{S}_0$ l'ensemble des tactiques $\Sigma \in \mathfrak{S}$ telles que :

$$Q[\Sigma]\Pi[\Sigma] = G \quad (\text{VI-27})$$

Posons :

$$I = \bigcup_{\Sigma \in \mathfrak{S}_0} I[\Sigma] \quad \text{et} \quad I' = \complement I \quad (\text{VI-28})$$

On a :

$$I = \bigcup_{s=0}^{d-1} (sn + I) = \{ sn + j \mid s = 0, \dots, d-1 \text{ et } j \in I \} \quad (\text{VI-29})$$

Démonstration. — Il est évident que I contient l'ensemble $\bigcup_{s=0}^{d-1} (sn + I)$.

En effet, si σ appartient à $\mathfrak{S}_0$, la tactique Σ de $\mathfrak{S}$ telle que :

$$\Sigma_s = \sigma \quad \forall s = 0, \dots, d-1 \quad (\text{VI-30})$$

appartient à $\mathfrak{S}_0$ d'après la proposition 11 et son corollaire. On conclut à l'aide de (VI-20) et (V-3).

Montrons l'inclusion inverse. Soit Σ une tactique de $\mathfrak{S}_0$; il suffit de montrer que si i est un état final du graphe $(\mathbf{I}_0, \Gamma[\Sigma])$, alors $i^\#$ appartient à I .

Soit donc i un élément de $\mathbf{I}[\Sigma]$, et soit $\mathbf{J}$ la classe finale à laquelle il appartient. Posons :

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}^\# = \{i^\# \mid i \in \mathbf{J}\} \quad (\text{VI-31})$$

La démonstration consiste à construire une tactique τ appartenant à $\mathfrak{S}_0$ et telle que $i^\#$ soit un état final du graphe $(\mathbf{I}_0, \gamma[\tau])$.

Soit L un circuit du graphe $(\mathbf{I}_0, \Gamma[\Sigma])$ d'origine et d'extrémité i , et passant par tous les sommets de $\mathbf{J}$: si $i_0 = i, i_1, \dots, i_N, i_{N+1} = i$ sont les sommets de ce circuit, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{J} = \bigcup_{r=0}^N \{i_r\} \end{array} \right. \quad (\text{VI-32})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i_{r+1} \in \Gamma[\Sigma](i_r) \quad \forall r = 0, \dots, N \end{array} \right. \quad (\text{VI-33})$$

Pour tout $j \in \mathbf{J}$, posons :

$$r(j) = \text{Max} \{r \leq N \mid i_r^\# = j\} \quad (\text{VI-34})$$

Considérons alors la tactique $\tau \in \mathfrak{S}$ définie par :

$$\tau(j) = \begin{cases} \Sigma_{\mathbf{E}(i_{r(j)})}(i_{r(j)}^\#) & \text{si } j \in \mathbf{J} \\ \tilde{\sigma}^0(j) & \text{si } j \notin \mathbf{J} \end{cases} \quad (\text{VI-35})$$

1) τ appartient à $\mathfrak{S}_0$. En effet, comme Σ est un élément de $\mathfrak{S}_0$, on a, d'après (VI-26) et (V-4) :

$$\begin{cases} GP_i[\Sigma] = G_i & \forall i \in \mathbf{I}_0 \\ G_i + W_i[\tilde{\Sigma}^0] = Q_i[\Sigma] + W[\tilde{\Sigma}^0]P_i[\Sigma] & \forall i \in \mathbf{I}[\Sigma] \end{cases} \quad (\text{VI-36})$$

si bien que la tactique τ vérifie :

$$\begin{cases} gp[\tau] = g \\ g + w[\tilde{\sigma}^0] = q[\tau] + w[\tilde{\sigma}^0]p[\tau] \end{cases} \quad (\text{VI-37})$$

ce qui prouve que $q[\tau]\pi[\tau]$ est égal à g .

2) $i^\#$ est un état final du graphe $(I_0, \gamma[\tau])$. Pour établir ce résultat, il suffit de montrer que :

A) Tout sommet j de J est relié à $i^\#$ par un chemin de $(I_0, \gamma[\tau])$.

B) J est un ensemble clos de $(I_0, \gamma[\tau])$.

Soit j un sommet quelconque de J , et posons :

$$\begin{cases} r_0 = r(j) \\ r_{s+1} = r(i_{r_s+1}^\#) \end{cases} \quad \forall s \in \mathbb{N} \quad (\text{VI-38})$$

Si $r_s + 1$ est différent de $N + 1$, on a :

$$r_{s+1} = r(i_{r_s+1}^\#) \geq r_s + 1 > r_s \quad (\text{VI-39})$$

Il existe donc t tel que :

$$r_t + 1 = N + 1 \quad (\text{VI-40})$$

D'autre part :

$$\begin{cases} i_{r_s+1}^\# \in \gamma[\tau](i_{r_s}^\#) \\ i_{r_s+1}^\# = i_{r_s+1}^\# \end{cases} \quad \forall s = 0, \dots, t \quad (\text{VI-41})$$

et par conséquent :

$$i_{r_s+1}^\# \in \widehat{\gamma[\tau]}^s(i_{r_0}^\#) \quad \forall s = 0, \dots, t \quad (\text{VI-42})$$

On a donc :

$$i^\# = i_{N+1}^\# = i_{r_t+1}^\# \in \widehat{\gamma[\tau]}^t(i_{r_0}^\#) = \widehat{\gamma[\tau]}^t(j) \quad (\text{VI-43})$$

ce qui prouve A).

Quant à B), il est évident que J est stable par $\gamma[\tau]$ puisque $\mathbf{J}$ est une classe finale de Σ .

La démonstration est ainsi terminée.

REMARQUE. — En général les ensembles $\mathfrak{S}_0$ et $\mathfrak{S}_0^d$ ne sont pas comparables comme le prouve les exemples 3 et 4.

Donnons maintenant la formulation du problème à résoudre dans ce nouveau système, $\mathcal{C}$, dont on vient d'étudier quelques propriétés.

Soit $\mathbf{S}$ l'ensemble $\mathfrak{S}^{\mathbf{N}}$ des stratégies de $\mathcal{C}$. Étant donné $V(0) \in (\mathbb{R}^{dn})'$ et $\mathbf{S} \in \mathbf{S}$, définissons par récurrence les vecteurs $V[\mathbf{S}](m)$ de $(\mathbb{R}^{dn})'$ tels que :

$$V[\mathbf{S}](m) = Q[\mathbf{S}(m)] + V[\mathbf{S}](m-1)P[\mathbf{S}(m)] \quad (\text{VI-44})$$

$V_i[\mathbf{S}](m)$ est alors le gain moyen obtenu dans le système $\mathcal{C}$, à l'instant 0, en partant de l'état i à l'instant m , pour la stratégie $\mathbf{S}$, quand les gains finals sont $V_1(0), \dots, V_{dn}(0)$.

Compte tenu de la structure des vecteurs colonnes $P_i[k]$ ($i \in \mathbf{I}_0, k \in \mathbf{K}_i$), on a aussi :

$$V_i[S](m) = Q_i[S(m)(i)] + \sum_{j=\overline{E(i)-1}+1}^{\overline{E(i)-1}+d} V_j[S](m-1)P_i^j[S(m)(i)] \quad (\text{VI-45})$$

Dans toute la suite, on supposera que :

$$V_i(0) = \tilde{v}_{i\#}(E(i)) \quad \forall i \in \mathbf{I}_0 \quad (\text{VI-46})$$

Alors, le gain moyen maximal obtenu dans le système $\mathcal{C}$, à l'instant 0, en partant de l'état i à l'instant m , $\tilde{V}_i(m)$, et qui est donné par la relation d'actualisation

$$\tilde{V}_i(m) = \sup_{k \in \mathbf{K}_i} \left(Q_i[k] + \sum_{j=1}^{dn} \tilde{V}_j(m-1)P_i^j[k] \right) \quad (\text{VI-47})$$

ou encore :

$$\tilde{V}(m) = \sup_{\Sigma \in \mathcal{S}} (Q[\Sigma] + \tilde{V}(m-1)P[\Sigma]) \quad (\text{VI-48})$$

est tel que, pour tout $m \in \mathbf{N}$ et pour tout $s = 0, \dots, d-1$

$$\tilde{V}_i(md+s) = \begin{cases} \tilde{v}_{i\#}(md+d+E(i)) & \text{si } E(i) < s \\ \tilde{v}_{i\#}(md+E(i)) & \text{si } E(i) \geq s \end{cases} \quad (\text{VI-49})$$

On appelle stratégie optimale, et on note $\tilde{\mathbf{S}}$, une stratégie $\mathbf{S} \in \mathbf{S}$ telle que :

$$V[\mathbf{S}](m) = \tilde{V}(m) \quad \forall m \in \mathbf{N} \quad (\text{VI-50})$$

En vertu de (VI-49), pour toute stratégie optimale $\tilde{\mathbf{S}}$ de $\mathcal{C}$, il existe une stratégie optimale $\tilde{S}$ de $\mathcal{C}$, telle que :

$$\tilde{S}_i(md+s) = \begin{cases} \tilde{S}(md+d+r) & \text{si } r < s \\ \tilde{S}(md+r) & \text{si } r \geq s \end{cases} \quad \forall s = 0, \dots, d-1 \quad \forall m \in \mathbf{N} \quad (\text{VI-51})$$

Pour tout $s = 0, \dots, d-1$ considérons le vecteur $U(s)$ de $(\mathbf{R}^{dn})'$ défini par :

$$U_i(s) = \overline{d-s+E(i)}g_{i\#} \quad (\text{VI-52})$$

Quel que soit $m \in \mathbf{N}$ et quel que soit $s = 0, \dots, d-1$, on a :

$$\begin{aligned} (md+s)G_i + U_i(s) &= (md+s+\overline{d-s+E(i)})g_{i\#} \\ &= \begin{cases} (md+d+E(i))g_{i\#} & \text{si } E(i) < s \\ (md+E(i))g_{i\#} & \text{si } E(i) \geq s \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{VI-53})$$

de sorte que d'après le corollaire de la proposition 10 :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [\tilde{V}_i(md+s) - (md+s)G_i - U_i(s)] = z_{i\#}(E(i)) \quad \forall i \in \mathbf{I}_0 \quad \forall s = 0, \dots, d-1 \quad (\text{VI-54})$$

Si donc Z est le vecteur de $(\mathbf{R}^{dn})'$ tel que :

$$Z_i = z_i \# (E(i)) \quad \forall i \in I_0 \quad (\text{VI-55})$$

on a :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [\tilde{V}(m) - mG - U(\bar{m})]_{\mathbf{I}} = Z_{\mathbf{I}} \quad (\text{VI-56})$$

C'est pour cette relation qu'a été introduit le système $\mathcal{C}$.

Lemme 4. — *Quelle que soit la tactique $\Sigma \in \mathfrak{S}$, on a :*

$$U(\bar{m})P[\Sigma] \leq U(\overline{m+1}) \quad \forall m \in \mathbf{N} \quad (\text{VI-57})$$

De plus :

$$\Sigma \in \mathfrak{S}_0 \Rightarrow U(\bar{m})P[\Sigma] = U(\overline{m+1}) \quad (\text{VI-58})$$

Démonstration. — En raison de la structure des matrices $P[\Sigma]$, il suffit pour obtenir (VI-57) de remarquer que quelle que soit $\Sigma \in \mathfrak{S}$, on a :

$$gp[\Sigma_s] \leq g \quad \forall s = 0, \dots, d-1 \quad (\text{VI-59})$$

Quant à (VI-58), c'est une conséquence du fait que si Σ appartient à $\mathfrak{S}_0$, on a $GP[\Sigma] = G$, et par conséquent :

$$gp[\Sigma_s] = g \quad \forall s = 0, \dots, d-1 \quad (\text{VI-60})$$

VII. — RETOUR A L'ETUDE ASYMPTOTIQUE DE $\tilde{v}$

Proposition 13. — *Quelle que soit la tactique Σ appartenant à $\mathfrak{S}_0$, on a :*

$$Z_{\mathbf{I}} \geq W_{\mathbf{I}}[\Sigma] + Z\Pi_{\mathbf{I}}[\Sigma] \quad (\text{VII-1})$$

Démonstration. — Soit $\Sigma \in \mathfrak{S}_0$. D'après la proposition 3, on a :

$$\begin{aligned} \tilde{V}((m+r)D[\Sigma] + s) - ((m+r)D[\Sigma] + s)G - Z[\Sigma] \\ \geq [\tilde{V}(mD[\Sigma]) - (mD[\Sigma])G - Z[\Sigma]] \widehat{P[\Sigma]}^{rD[\Sigma]+s} \end{aligned} \quad (\text{VII-2})$$

En faisant tendre r vers l'infini, il vient, d'après (VI-56) :

$$(Z + U(s) - Z[\Sigma])_{\mathbf{I}} \geq [(\tilde{V}(mD[\Sigma]) - (mD[\Sigma])G - Z[\Sigma]) \prod_{\mathbf{I}}^{(D[\Sigma])} \widehat{[\Sigma]P[\Sigma]}^s]_{\mathbf{I}} \quad (\text{VII-3})$$

et comme $\left(\prod_{\mathbf{I}}^{(D[\Sigma])} [\Sigma] \right)^{\mathbf{I}'}$ est nul, puisque $\mathbf{I}[\Sigma]$ est contenu dans $\mathbf{I}$, on obtient, en passant à la limite quand m tend vers l'infini :

$$(Z + U(s) - Z[\Sigma])_{\mathbf{I}} \geq [(Z + U(0) - Z[\Sigma]) \prod_{\mathbf{I}}^{(D[\Sigma])} \widehat{[\Sigma]P[\Sigma]}^s]_{\mathbf{I}} \quad (\text{VII-4})$$

D'autre part, d'après (VI-58), on a :

$$U(s) = U(0) \prod_{(D[\Sigma])} [\Sigma] \widehat{P[\Sigma]}^s \quad \forall s = 0, \dots, D[\Sigma] - 1 \quad (\text{VII-5})$$

En définitive, pour tout $s = 0, \dots, D[\Sigma] - 1$, on a :

$$(Z - Z[\Sigma])_{\mathbf{I}} \geq [(Z - Z[\Sigma]) \prod_{(D[\Sigma])} [\Sigma] \widehat{P[\Sigma]}^s]_{\mathbf{I}} \quad (\text{VII-6})$$

et par conséquent :

$$(Z - Z[\Sigma])_{\mathbf{I}} \geq (Z - Z[\Sigma]) \Pi_{\mathbf{I}}[\Sigma] \quad (\text{VII-7})$$

ce qui prouve que $Z_{\mathbf{I}}$ est supérieur à $Z_{\mathbf{I}}[\Sigma]$.

Proposition 14. — $\tilde{Z}_{\mathbf{I}}$ est égal à $Z_{\mathbf{I}}$.

Démonstration. — Pour toute tactique Σ appartenant à $\mathfrak{S}_0$, on a :

$$Z_{\mathbf{I}} \geq W_{\mathbf{I}}[\tilde{\Sigma}^Z] + Z \Pi_{\mathbf{I}}[\tilde{\Sigma}^Z] \geq W_{\mathbf{I}}[\Sigma] + Z \Pi_{\mathbf{I}}[\Sigma] \quad (\text{VII-8})$$

la première inégalité étant une conséquence de la proposition 13, et la seconde, du théorème 1. On conclut à l'aide du lemme 2.

Corollaire 1. — D'après (VI-56), on a :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [\tilde{V}(m) - mG - U(\tilde{m})]_{\mathbf{I}} = \tilde{Z}_{\mathbf{I}} \quad (\text{VII-9})$$

Corollaire 2. — $\tilde{Z}$ est un point fixe de l'application $X \mapsto \tilde{X}$.

Proposition 15. — Pour tout $i \in \mathbf{I}_0$, soit $\tilde{\mathbf{K}}_i$ le sous-ensemble de $\mathbf{K}_i$ des commandes k telles que :

$$\begin{bmatrix} GP_i[k] \\ Q_i[k] + \tilde{Z}P_i[k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} GP_i[\tilde{\Sigma}^Z] \\ Q_i[\tilde{\Sigma}^Z] + \tilde{Z}P_i[\tilde{\Sigma}^Z] \end{bmatrix} \quad (\text{VII-10})$$

et soit $\tilde{\mathfrak{S}}$ l'ensemble $\prod_{i=1}^{dn} \tilde{\mathbf{K}}_i$. Pour que Σ appartienne à $\tilde{\mathfrak{S}}$, il faut et il suffit que :

$$\begin{bmatrix} Q[\Sigma] \Pi[\Sigma] \\ Z[\Sigma] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ \tilde{Z} \end{bmatrix} \quad (\text{VII-11})$$

Démonstration. — Comme $\tilde{\Sigma}^Z$ est une tactique qui appartient à $\mathfrak{S}_0$, on a :

$$\Sigma \in \tilde{\mathfrak{S}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} GP[\Sigma] \\ Q[\Sigma] + \tilde{Z}P[\Sigma] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ G + \tilde{Z} \end{bmatrix} \quad (\text{VII-12})$$

Dans ces conditions, et puisque de toutes façons :

$$\begin{bmatrix} Q[\Sigma]\Pi[\Sigma]P[\Sigma] \\ Q[\Sigma] + Z[\Sigma]P[\Sigma] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q[\Sigma]\Pi[\Sigma] \\ Q[\Sigma]\Pi[\Sigma] + Z[\Sigma] \end{bmatrix} \quad (\text{VII-13})$$

la condition est suffisante.

Réciproquement, si

$$\begin{bmatrix} GP[\Sigma] \\ Q[\Sigma] + \tilde{Z}P[\Sigma] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ Q[\tilde{\Sigma}^Z] + \tilde{Z}P[\tilde{\Sigma}^Z] \end{bmatrix} \quad (\text{VII-14})$$

on a :

$$\begin{cases} GP[\Sigma] = G \end{cases} \quad (\text{VII-15})$$

$$\begin{cases} Q[\Sigma]\Pi[\Sigma] + Z[\Sigma] + (\tilde{Z} - Z[\Sigma])P[\Sigma] = G + \tilde{Z} \end{cases} \quad (\text{VII-16})$$

En appliquant le lemme 3 à (VII-15), et en multipliant les deux membres de (VII-16) par $\Pi[\Sigma]$, il vient :

$$\begin{cases} G\Pi[\Sigma] = G \\ Q[\Sigma]\Pi[\Sigma] = G\Pi[\Sigma] \end{cases} \quad (\text{VII-17})$$

ce qui prouve que $Q[\Sigma]\Pi[\Sigma]$ est égal à G . Et dans ces conditions, l'égalité (VII-16) s'écrit aussi :

$$\tilde{Z} - Z[\Sigma] = (\tilde{Z} - Z[\Sigma])P[\Sigma] \quad (\text{VII-18})$$

On en déduit (lemme 3) :

$$\tilde{Z} - Z[\Sigma] = (\tilde{Z} - Z[\Sigma])\Pi[\Sigma] = (\tilde{Z} - Z)\Pi[\Sigma] \quad (\text{VII-19})$$

d'où il résulte que $Z[\Sigma]$ est égal à $\tilde{Z}$: en effet, d'après la proposition 14, $(\tilde{Z} - Z)\Pi[\Sigma]$ est nul.

REMARQUE. — Le vecteur $\tilde{Z}$ ne dépend de Z que par l'intermédiaire de Z_1 ; il est donc totalement déterminé par les vecteurs $z_I(s)$ ($s = 0, \dots, d-1$).

Proposition 16. — Pour toute tactique Σ , soit $\xi[\Sigma](m)$ le vecteur de $(\mathbf{R}^{dn})'$ défini par :

$$\begin{aligned} Q[\tilde{\Sigma}^Z] + (mG + U(\bar{m}) + \tilde{Z})P[\tilde{\Sigma}^Z] - \xi[\Sigma](m) \\ = Q[\Sigma] + (mG + U(\bar{m}) + \tilde{Z})P[\Sigma] \end{aligned} \quad (\text{VII-20})$$

Il existe $M^Z \in \mathbf{N}$ et $c^Z > 0$ tels que, toutes les fois que m est supérieur à M^Z , on ait :

$$\begin{cases} \xi[\Sigma](m) \geq 0 \\ \xi_i[\Sigma](m) > 0 \Rightarrow \xi_i[\Sigma](m) \geq c^Z \\ \xi_i[\Sigma](m) = 0 \Rightarrow \Sigma(i) \in \tilde{\mathbf{K}}_i \end{cases} \quad (\text{VII-21})$$

Démonstration. — Soit $\xi^1[\Sigma](m)$ et $\xi^2[\Sigma](m)$ les vecteurs de $(\mathbf{R}^{dn})'$ définis par :

$$Q[\tilde{\Sigma}^Z] + (mG + \tilde{Z})P[\tilde{\Sigma}^Z] - \xi^1[\Sigma](m) = Q[\Sigma] + (mG + \tilde{Z})P[\Sigma] \quad (\text{VII-22})$$

$$U(\bar{m})P[\tilde{\Sigma}^Z] - \xi^2[\Sigma](m) = U(\bar{m})P[\Sigma] \quad (\text{VII-23})$$

En additionnant membre à membre on vérifie que :

$$\xi^1[\Sigma](m) + \xi^2[\Sigma](m) = \xi[\Sigma](m) \quad (\text{VII-24})$$

D'après la proposition 4, il existe $M^Z \in \mathbf{N}$ et $c^Z > 0$ tels que, pour tout $i \in \mathbf{I}_0$, l'une des deux relations suivantes soit vraie :

$$\bullet \quad \xi_i^1[\Sigma](m) \geq c^Z \quad \forall m \geq M^Z \quad (\text{VII-25})$$

$$\bullet \quad \xi_i^1[\Sigma](m) = 0 \quad \forall m \geq M^Z \quad (\text{VII-26})$$

Pour obtenir (VII-21) il ne reste alors plus qu'à prouver que pour tout $i \in \mathbf{I}_0$, on a d'une part :

$$\xi_i^2[\Sigma](m) \geq 0 \quad (\text{VII-27})$$

et d'autre part :

$$\xi_i^1[\Sigma](m) = 0 \quad \forall m \geq M^Z \Rightarrow \Sigma(i) \in \tilde{\mathbf{K}}_i \quad (\text{VII-28})$$

Or (VII-27) est une conséquence du lemme 4, puisque $\tilde{\Sigma}^Z$ appartient à $\mathfrak{S}_0$. Démontrons (VII-28). Si $\xi_i^1[\Sigma](m)$ est nul quel que soit $m \geq M^Z$, on déduit de (VII-22) :

$$Q_i[\tilde{\Sigma}^Z] + (mG + \tilde{Z})P_i[\tilde{\Sigma}^Z] = Q_i[\Sigma] + (mG + \tilde{Z})P_i[\Sigma] \quad \forall m \geq M^Z \quad (\text{VII-29})$$

En divisant par m et en prenant la limite quand m tend vers l'infini, il vient :

$$GP_i[\tilde{\Sigma}^Z] = GP_i[\Sigma] \quad (\text{VII-30})$$

Cette dernière égalité, jointe à (VII-29), prouve que $\Sigma(i)$ est une des commandes k qui vérifient (VII-10), c'est-à-dire, que $\Sigma(i)$ appartient à $\tilde{\mathbf{K}}_i$.

C.Q.F.D.

Proposition 17. — Il existe une stratégie $\bar{\mathbf{S}} \in \mathbf{S}$, à valeurs dans $\tilde{\mathfrak{S}}$, et telle que pour $m \geq M^Z$ les vecteurs $\xi(m)$ et $\zeta(m)$ de $(\mathbf{R}^{dn})'$ définis par la double égalité :

$$\begin{aligned} [\tilde{V}(m) - mG - U(\bar{m}) - \tilde{Z}]P[\bar{\mathbf{S}}(m+1)] - \xi(m+1) \\ = \tilde{V}(m+1) - (m+1)G - U(\overline{m+1}) - \tilde{Z} \\ = [\tilde{V}(m) - mG - U(\bar{m}) - \tilde{Z}]P[\bar{\mathbf{S}}(m+1)] + \zeta(m+1) \end{aligned} \quad (\text{VII-31})$$

vérifient :

$$\begin{cases} \zeta(m+1) = \xi[\tilde{S}(m+1)](m) \\ \zeta(m+1) \geq 0 \\ \zeta_i(m+1) = 0 \Rightarrow \zeta'_i(m+1) = 0 \end{cases} \quad (\text{VII-32})$$

Démonstration. — On a :

$$\tilde{V}(m+1) = Q[\tilde{S}(m+1)] + \tilde{V}(m)P[\tilde{S}(m+1)] \quad (\text{VII-33})$$

d'où :

$$\begin{aligned} \tilde{V}(m+1) &= Q[\tilde{S}(m+1)] + (mG + U(\bar{m}) + \tilde{Z})P[\tilde{S}(m+1)] \\ &\quad + (\tilde{V}(m) - mG - U(\bar{m}) - \tilde{Z})P[\tilde{S}(m+1)] \end{aligned} \quad (\text{VII-34})$$

D'après (VII-20), on en déduit :

$$\begin{aligned} \tilde{V}(m+1) &= Q[\tilde{\Sigma}^Z] + (mG + U(\bar{m}) + \tilde{Z})P[\tilde{\Sigma}^Z] - \xi[\tilde{S}(m+1)](m) \\ &\quad + [\tilde{V}(m) - mG - U(\bar{m}) - \tilde{Z}]P[\tilde{S}(m+1)] \\ &= (m+1)G + U(\overline{m+1}) + \tilde{Z} - \xi[\tilde{S}(m+1)](m) \\ &\quad + (\tilde{V}(m) - mG - U(\bar{m}) - \tilde{Z})P[\tilde{S}(m+1)] \end{aligned} \quad (\text{VII-35})$$

Les vecteurs $\zeta(m+1)$ et $\xi[\tilde{S}(m+1)](m)$ sont donc bien égaux.

Considérons la tactique $\tilde{S}(m+1)$ définie par

$$\tilde{S}(m+1)(i) = \begin{cases} \tilde{S}(m+1)(i) & \text{si } \xi_i[\tilde{S}(m+1)](m) = 0 \\ \tilde{\Sigma}^Z(i) & \text{si } \xi_i[\tilde{S}(m+1)](m) \neq 0 \end{cases} \quad (\text{VII-36})$$

et soit $\zeta'(m+1)$ le vecteur de $(\mathbf{R}^{dn})'$ tel que :

$$\tilde{V}(m+1) = Q[\tilde{S}(m+1)] + \tilde{V}(m)P[\tilde{S}(m+1)] + \zeta'(m+1) \quad (\text{VII-37})$$

D'après (VI-48), $\zeta'(m+1)$ vérifie $\zeta'(m+1) \geq 0$, et en raison de la définition de $\tilde{S}(m+1)$, on a :

$$\xi_i(m+1) = 0 \Rightarrow \zeta'_i(m+1) = 0 \quad (\text{VII-38})$$

Comme il est évident que $\tilde{S}(m+1)$ appartient à $\tilde{\mathfrak{S}}$ quel que soit $m \in \mathbf{N}$, il ne reste plus qu'à montrer que $\zeta'(m+1)$ est égal à $\zeta(m+1)$. Or on a :

$$\begin{aligned} \tilde{V}(m+1) &= Q[\tilde{S}(m+1)] + (mG + U(\bar{m}) + \tilde{Z})P[\tilde{S}(m+1)] + \zeta'(m+1) \\ &\quad + [\tilde{V}(m) - mG - U(\bar{m}) - \tilde{Z}]P[\tilde{S}(m+1)] \end{aligned} \quad (\text{VII-39})$$

Compte tenu de la définition de $\tilde{\mathfrak{S}}$, on en déduit :

$$\begin{aligned} \tilde{V}(m+1) &= (m+1)G + U(\overline{m+1}) + \tilde{Z} + \zeta'(m+1) \\ &\quad + [\tilde{V}(m) - mG - U(\bar{m}) - \tilde{Z}]P[\tilde{S}(m+1)] \end{aligned} \quad (\text{VII-40})$$

C.Q.F.D.

Proposition 18. — Si I' n'est pas vide, il existe un nombre fini $r + 1$ de sous-ensembles de I' :

$$I_1 = I' \supset I_2 \supset \dots \supset I_r \supset I_{r+1} = \emptyset \quad (\text{VII-41})$$

et tels que, les inclusions étant strictes, pour tout $s = 1, \dots, r$, pour tout $i \in I_s - I_{s+1}$, et quelle que soit la tactique Σ appartenant à $\tilde{\mathfrak{S}}$, il existe au moins un j n'appartenant pas à I_s pour lequel $P_i^j[\Sigma]$ soit strictement positif.

Autrement dit, les ensembles $I_1, \dots, I_r$ sont tels que dans n'importe lequel des graphes $(I_0, \Gamma[\Sigma])$, pour $\Sigma \in \tilde{\mathfrak{S}}$, chaque sommet i appartenant à $I_s - I_{s+1}$ est l'origine d'au moins un arc dont l'extrémité j n'appartient pas à I_s .

REMARQUE. — On a :

$$GI_s = \bigcup_{t=0}^{s-1} (I_t - I_{t+1}) \quad \forall s = 1, \dots, r + 1 \quad (\text{VII-42})$$

Démonstration. — Étant donné un sous-ensemble $I_s(t)$ de I_0 (avec $s \in \mathbb{N}$, et $t \in \mathbb{N}$), soit $H_s(t + 1)$ le sous-ensemble de I_0 défini par :

$$H_s(t + 1) = \{ i \in I_0 \mid \exists k \in \tilde{K}_i \text{ tel que } \sum_{j \in I_s(t)} P_i^j[k] = 1 \} \quad (\text{VII-43})$$

En raison de la définition $\tilde{\mathfrak{S}}$, $H_s(t + 1)$ est l'ensemble des sommets i de I_0 pour lesquels il existe une tactique Σ appartenant à $\tilde{\mathfrak{S}}$ telle que $\Gamma[\Sigma](i)$ soit contenu dans $I_s(t)$.

Pour tout $i \in H_s(t + 1)$, on note $k_s(i, t + 1)$ l'une quelconque des commandes $k \in \tilde{K}_i$ qui satisfait à :

$$\sum_{j \in I_s(t)} P_i^j[k] = 1 \quad (\text{VII-44})$$

Soit alors I_s un sous-ensemble de I' . Posons :

$$I_s(0) = I_s \quad (\text{VII-45})$$

et définissons par récurrence les sous-ensembles $I_s(t)$ de I_0 tels que

$$I_s(t) = H_s(t) \cup I_s(t - 1) \quad \forall t = 1, 2, \dots \quad (\text{VII-46})$$

Comme $I_s(t)$ contient $I_s(t - 1)$, $H_s(t + 1)$ contient $H_s(t)$, de sorte qu'on peut montrer par récurrence que :

$$I_s(t) = H_s(t) \cup I_s \quad \forall t = 1, 2, \dots \quad (\text{VII-47})$$

De plus, on a :

$$I_s \subset I_s(1) \subset \dots \subset I_s(t) \subset \dots \subset I_0 \quad (\text{VII-48})$$

Il en résulte, puisque I_0 est fini, qu'il existe un indice t_s tel que :

$$I_s(t_s + 1) = I_s(t_s) \quad (\text{VII-49})$$

et par conséquent :

$$H_s(t_s + 1) \subset I_s(t_s) \quad (\text{VII-50})$$

Montrons que I_s n'est pas contenu dans $H_s(t_s + 1)$. En effet, si I_s est inclus dans $H_s(t_s + 1)$, l'ensemble $I_s(t_s)$ est égal, d'après (VII-49) et (VII-47), à $H_s(t_s + 1)$. Définissons alors pour tout $i \in I_s(t_s)$ l'entier $t(i)$ tel que :

$$t(i) = \text{Min} \{ t \geq 0 \mid i \in H_s(t) \} \quad (\text{VII-51})$$

et considérons la tactique T telle que :

$$T(i) = \begin{cases} k_s(i, t(i)) & \text{si } i \in I_s(t_s) \\ \tilde{Z}(i) & \text{si } i \notin I_s(t_s) \end{cases} \quad (\text{VII-52})$$

Il est évident que T appartient à $\tilde{\mathfrak{S}}$. De plus, $I_s(t_s)$ est un ensemble clos du graphe $(I_0, \Gamma[T])$, en raison de la définition de $H_s(t_s + 1)$, et parce que $H_s(t_s + 1)$ est égal à $I_s(t_s)$. Enfin, la définition de T est telle que pour tout sommet i appartenant à $I_s(t_s)$, il existe au moins un t pour lequel :

$$\widehat{\Gamma[T]}(i) \cap I_s \neq \emptyset \quad (\text{VII-53})$$

En définitive, T est une tactique de $\mathfrak{S}_0$ et $I(T)$ rencontre I_s , ce qui est contradictoire, puisque I_s est contenu dans I' .

Par conséquent l'ensemble I_{s+1} tel que :

$$I_{s+1} = I_s \cap H_s(t_s + 1) \quad (\text{VII-54})$$

est strictement inclus dans I_s . De plus :

$$\begin{aligned} i \in I_s - I_{s+1} &\Rightarrow i \notin H_s(t_s + 1) \\ &\Rightarrow \sum_{j \in I_s(t_s)} P_i^j[k] < 1 \quad \forall k \in \tilde{K}_i \end{aligned} \quad (\text{VII-55})$$

Comme $I_s(t_s)$ contient I_s , on en déduit :

$$\forall i \in I_s - I_{s+1} \quad \forall k \in \tilde{K}_i \quad \exists j \in \mathcal{C}I_s \quad \text{tel que} \quad P_i^j[k] > 0 \quad (\text{VII-56})$$

On définit ainsi I_{s+1} à partir de I_s . Pour obtenir la proposition, il suffit de prendre pour I_1 l'ensemble I' .

Proposition 19. — *On a :*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [\tilde{V}(m) - mG - U(\bar{m}) - \tilde{Z}] = 0 \quad (\text{VII-57})$$

Démonstration. — Étant donné un ensemble J contenu dans I_0 , posons :

$$\delta_J(m) = \min_{i \in J} [\tilde{V}_i(m) - mG_i - U_i(\bar{m}) - \tilde{Z}_i] \quad (\text{VII-58})$$

$$\Delta_J(m) = \max_{i \in J} [\tilde{V}_i(m) - mG_i - U_i(\bar{m}) - \tilde{Z}_i] \quad (\text{VII-59})$$

$$f_J(m) = \Delta_J(m) - \delta_J(m) \quad (\text{VII-60})$$

Si J est l'ensemble I_0 lui-même, on écrira $\delta(m)$, $\Delta(m)$ et $f(m)$, au lieu de $\delta_{I_0}(m)$, $\Delta_{I_0}(m)$ et $f_{I_0}(m)$. D'après la proposition 17, δ (resp. Δ , resp. f) est une fonction croissante (resp. décroissante, resp. décroissante) de m pour $m \geq M^Z$.

On sait déjà (corollaire 1 de la proposition 14) que :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [\tilde{V}(m) - mG - U(\bar{m}) - \tilde{Z}]_I = 0 \quad (\text{VII-61})$$

Il suffit donc de montrer que $f(m)$ tend vers zéro quand m tend vers l'infini, dans le cas où I' n'est pas vide.

Raisonnons par l'absurde; et puisque f est une fonction décroissante (pour $m \geq M^Z$), supposons qu'il existe un nombre ε strictement positif tel que :

$$f(m) \geq \varepsilon \quad \forall m \geq M^Z \quad (\text{VII-62})$$

Soit alors M un entier tel que :

$$m \geq M \Rightarrow f_I(m) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{VII-63})$$

Pour $m \geq \max(M, M^Z)$, on a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(m) = \max_{0 \leq s \leq r} f_{I_s - I_{s+1}}(m) = \max_{1 \leq s \leq r} f_{I_s - I_{s+1}}(m) \end{array} \right. \quad (\text{VII-64})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(m) - f_{I_0 - I_1}(m) = f(m) - f_I(m) \geq \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \right. \quad (\text{VII-65})$$

Supposons m supérieur à M et M^Z , et considérons les égalités (VII-31) pour $m, m+1, \dots, m+r$:

$$\begin{aligned} & [\tilde{V}(m+t-1) - (m+t-1)G - \overline{U(m+t-1)} - \tilde{Z}]P[\tilde{S}(m+t)] \\ & \quad - \xi(m+t) \\ & = \tilde{V}(m+t) - (m+t)G - \overline{U(m+t)} - \tilde{Z} \quad (\text{VII-66}) \\ & = [\tilde{V}(m+t-1) - (m+t-1)G - \overline{U(m+t-1)} - \tilde{Z}]P[\tilde{S}(m+t)] \\ & \quad + \zeta(m+t) \end{aligned}$$

D'après les propositions 16 et 17, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{S}(m+t) \in \tilde{\mathfrak{S}} \\ \xi(m+t) \geq 0 \\ \zeta(m+t) \geq 0 \\ \xi_i(m+t) = 0 \Rightarrow \zeta_i(m+t) = 0 \\ \xi_i(m+t) > 0 \Rightarrow \xi_i(m+t) \geq c^Z \end{array} \right. \quad \forall t = 1, \dots, r \quad (\text{VII-67})$$

D'autre part, posons :

$$a = \text{Min} \{ p_i^j[k] \mid p_i^j[k] > 0, i \in I_0, j \in I_0, k \in K_i \} \quad (\text{VII-68})$$

et aussi :

$$\mathbf{I}'_s = \mathbf{G}\mathbf{I}_s = \bigcup_{t=0}^{s-1} (\mathbf{I}_t - \mathbf{I}_{t+1}) \quad \forall s = 1, \dots, r+1 \quad (\text{VII-69})$$

Alors, en vertu de la proposition 18, on a :

$$\forall s = 1, \dots, r \quad \forall i \in \mathbf{I}_s - \mathbf{I}_{s+1} \quad \exists j_i \in \mathbf{I}'_s \quad \text{tel que} \quad P_i^{j_i}[\bar{S}(m+t)] \geq a \quad (\text{VII-70})$$

Dans ces conditions, si $i \in \mathbf{I}_s - \mathbf{I}_{s+1}$, on déduit de la seconde égalité de (VII-66) :

$$\begin{aligned} \tilde{V}_i(m+t) - (m+t)G_i - U_i(\overline{m+t}) - \tilde{Z}_i \\ \geq (1-a)\delta(m+t-1) \end{aligned} \quad (\text{VII-71})$$

$$+ a[\tilde{V}_{j_i}(m+t-1) - (m+t-1)G_{j_i} - U_{j_i}(\overline{m+t-1}) - \tilde{Z}_{j_i}]$$

et de la première, si $\xi_i(m+t)$ n'est pas nul :

$$\tilde{V}_i(m+t) - (m+t)G_i - U_i(\overline{m+t}) - \tilde{Z}_i \leq \Delta(m+t-1) - c^Z \quad (\text{VII-72})$$

Si $\xi_i(m+t)$ est nul, il en est de même pour $\zeta_i(m+t)$, et on déduit de la seconde égalité de (VII-66) :

$$\begin{aligned} \tilde{V}_i(m+t) - (m+t)G_i - U_i(\overline{m+t}) - \tilde{Z}_i \\ \leq (1-a)\Delta(m+t-1) \end{aligned} \quad (\text{VII-73})$$

$$+ a[\tilde{V}_{j_i}(m+t-1) - (m+t-1)G_{j_i} - U_{j_i}(\overline{m+t-1}) - \tilde{Z}_{j_i}]$$

Ainsi, pour tout $t = 1, \dots, r$, on a :

$$f_{\mathbf{I}_t - \mathbf{I}_{t+1}}(m+t) \leq \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} f(m+t-1) - c^Z \\ (1-a)f(m+t-1) + af_{\mathbf{I}'_t}(m+t-1) \end{array} \right. \quad (\text{VII-74})$$

d'où, d'après (VII-69) et puisque f est une fonction décroissante :

$$f_{\mathbf{I}_s - \mathbf{I}_{s+1}}(m+t) \leq \text{Max}_{0 \leq s' < s} \text{Max} \begin{cases} f(m) - c^Z \\ (1-a)f(m) + af_{\mathbf{I}_{s'} - \mathbf{I}_{s'+1}}(m+t-1) \end{cases} \quad (\text{VII-75})$$

Compte tenu de (VII-65), on obtient finalement :

$$f_{\mathbf{I}_s - \mathbf{I}_{s+1}}(m+t) \leq \text{Max}_{1 \leq s' < s} \text{Max} \begin{cases} f(m) - c^Z \\ f(m) - a \frac{\varepsilon}{2} \\ (1-a)f(m) + af_{\mathbf{I}_{s'} - \mathbf{I}_{s'+1}}(m+t-1) \end{cases} \quad (\text{VII-76})$$

On remarquera que si s est égal à 1 cette inégalité s'écrit :

$$f_{\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2}(m+t) \leq \text{Max} \begin{cases} f(m) - c^Z \\ f(m) - a \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \quad (\text{VII-77})$$

Considérons alors $f(m+r)$. D'après (VII-64) et (VII-76), on a :

$$f(m+r) \leq \text{Max}_{1 \leq s \leq r} \text{Max}_{1 \leq s' < s} \text{Max} \begin{cases} f(m) - c^Z \\ f(m) - a \frac{\varepsilon}{2} \\ (1-a)f(m) + af_{\mathbf{I}_{s'} - \mathbf{I}_{s'+1}}(m+r-1) \end{cases} \quad (\text{VII-78})$$

c'est-à-dire :

$$f(m+r) \leq \text{Max}_{1 \leq s \leq r-1} \text{Max} \begin{cases} f(m) - c^Z \\ f(m) - a \frac{\varepsilon}{2} \\ (1-a)f(m) + af_{\mathbf{I}_s - \mathbf{I}_{s+1}}(m+r-1) \end{cases} \quad (\text{VII-79})$$

Utilisons (VII-76) pour majorer $f_{\mathbf{I}_s - \mathbf{I}_{s+1}}(m+r-1)$; il vient :

$$f(m+r) \leq \text{Max}_{1 \leq s \leq r-1} \text{Max}_{1 \leq s' < s} \text{Max} \begin{cases} f(m) - c^Z \\ f(m) - a \frac{\varepsilon}{2} \\ f(m) - ac^Z \\ f(m) - a^2 \frac{\varepsilon}{2} \\ (1-a^2)f(m) + a^2 f_{\mathbf{I}_{s'} - \mathbf{I}_{s'+1}}(m+r-2) \end{cases} \quad (\text{VII-80})$$

ou encore, puisque a est compris entre 0 et 1 :

$$f(m+r) \leq \text{Max}_{1 \leq s \leq r-2} \text{Max} \begin{cases} f(m) - ac^Z \\ f(m) - a^2 \frac{\varepsilon}{2} \\ (1 - a^2)f(m) + a^2 f_{I_s - I_{s+1}}(m+r-2) \end{cases} \quad (\text{VII-81})$$

En renouvelant $r-3$ fois ce raisonnement on arrive à :

$$f(m+r) \leq \text{Max} \begin{cases} f(m) - a^{r-2} c^Z \\ f(m) - a^{r-1} \frac{\varepsilon}{2} \\ (1 - a^{r-1})f(m) + a^{r-1} f_{I_1 - I_2}(m+1) \end{cases} \quad (\text{VII-82})$$

Le même raisonnement utilisé une nouvelle fois, mais avec (VII-77), donne finalement :

$$f(m+r) \leq \text{Max} \begin{cases} f(m) - a^{r-1} c^Z \\ f(m) - a^r \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \quad (\text{VII-83})$$

En opérant alors par récurrence, on déduit de (VII-83) :

$$f(m+hr) \leq \text{Max} \begin{cases} f(m) - ha^{r-1} c^Z \\ f(m) - ha^r \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \quad \forall h \in \mathbf{N} \quad (\text{VII-84})$$

Mais $f(m+hr)$ est de toutes façons un nombre positif; on peut donc trouver un $h \in \mathbf{N}$ tel que l'inégalité (VII-84) soit absurde.

C.Q.F.D.

Revenons au problème initialement posé, à savoir, l'étude du comportement asymptotique de $\tilde{v}$. On est maintenant en mesure d'énoncer le théorème suivant.

Théorème 3. — Il existe d vecteurs de $(\mathbf{R}^n)'$, $\hat{z}(0), \dots, \hat{z}(d-1)$ et d tactiques $\tilde{\sigma}_0, \dots, \tilde{\sigma}_{d-1}$ tels que :

$$1) \lim_{m \rightarrow \infty} [\tilde{v}(md+s) - (md+s)g] = \tilde{z}(s) \quad \forall s = 0, \dots, d-1 \quad (\text{VII-85})$$

$$2) \begin{cases} gp[\tilde{\sigma}_s] = g \\ q[\tilde{\sigma}_s] + \tilde{z}(\overline{s-1})p[\tilde{\sigma}_s] = g + \tilde{z}(s) \end{cases} \quad \forall s = 0, \dots, d-1 \quad (\text{VII-86})$$

($\overline{s-1}$ étant égal à $s-1$ si $s > 0$ et à $d-1$ si $s = 0$).

3) Quelle que soit la tactique $\sigma \in \mathfrak{S}$

$$\left[\begin{array}{c} gp[\tilde{\sigma}_s] \\ q[\tilde{\sigma}_s] + \tilde{z}(s-1)p[\tilde{\sigma}_s] \end{array} \right] \geq \left[\begin{array}{c} gp[\sigma] \\ q[\sigma] + \tilde{z}(s-1)p[\sigma] \end{array} \right] \quad \forall s = 0, \dots, d-1 \quad (\text{VII-87})$$

Rappelons que le nombre d a été défini au corollaire de la proposition 10 (§ V).

Démonstration. — On définit $\tilde{z}(s)$ par :

$$\tilde{z}_j(s) = \tilde{Z}_{sn+j} \quad \forall j \in I_0 \quad \forall s = 0, \dots, d-1 \quad (\text{VII-88})$$

et $\tilde{\sigma}_s$ par :

$$\tilde{\sigma}_s = \tilde{\Sigma}_s^Z \quad \forall s = 0, \dots, d-1 \quad (\text{VII-89})$$

et le théorème est une conséquence de la proposition 19 et des propriétés de $\tilde{Z}$.

REMARQUE. — Les tactiques $\tilde{\sigma}_0, \dots, \tilde{\sigma}_{d-1}$ n'appartiennent pas nécessairement à $\mathfrak{S}_0$ (exemple 4).

VIII. — ETUDE DU COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE $\tilde{S}$

Proposition 20. — Il existe un entier M'_0 tel que pour tout $m \geq M'_0$, la tactique $\tilde{S}(m)$ appartienne à $\tilde{\mathfrak{S}}$.

Démonstration. — Considérons les égalités (VII-31). Comme les matrices $P[\tilde{S}(m+1)]$ et $P[\tilde{S}(m+1)]$ sont stochastiques, on en déduit que :

$$\xi_i(m+1) + \zeta_i(m+1) \leq f(m) \quad \forall i \in I_0 \quad (\text{VIII-1})$$

Or $f(m)$ tend vers zéro quand m tend vers l'infini; et d'autre part, pour tout $i \in I_0$ et pour tout $m \geq M^Z$, $\xi_i(m+1)$ est soit nul, soit supérieur à c^Z . On en conclut qu'il existe un entier $M'_0 \geq M^Z$ tel que pour tout $m \geq M'_0 - 1$, $\xi(m+1)$ est nul, ce qui implique que $\tilde{S}(m+1)$ et $\bar{S}(m+1)$ sont égales, et donc que $\tilde{S}(m+1)$ appartient à $\tilde{\mathfrak{S}}$.

Corollaire. — Si $\tilde{\mathfrak{S}}$ n'a qu'un élément, la stratégie $\tilde{S}$ est asymptotiquement constante. On a :

$$\tilde{S}(m) = \tilde{\Sigma}^Z \quad \forall m \geq M'_0 \quad (\text{VIII-2})$$

REMARQUE. — Pour que $\tilde{\mathfrak{S}}$ n'ait qu'un élément il faut et il suffit qu'il en soit de même pour tous les ensembles $\tilde{\mathfrak{K}}_i$ ($i \in I_0$).

Proposition 21. — Pour tout $m \in \mathbb{N}$, soit $\hat{S}^m$ la stratégie telle que :

$$\hat{S}^m(r) = \begin{cases} \tilde{S}(r) & \text{si } r \leq m \\ \tilde{\Sigma}^Z & \text{si } r > m \end{cases} \quad (\text{VIII-3})$$

On a :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [\tilde{V}(m + rD[\tilde{\Sigma}^Z] + s) - V[\hat{S}^m](m + rD[\tilde{\Sigma}^Z] + s)] = \varepsilon^s(m) \quad (\text{VIII-4})$$

avec :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon^s(m) = 0 \quad \forall s = 0, \dots, D[\tilde{\Sigma}^Z] - 1 \quad (\text{VIII-5})$$

Démonstration. — Pour tout $r \geq 0$, on a :

$$V[\hat{S}^m](m + r + 1) = Q[\tilde{\Sigma}^Z] + V[\hat{S}^m](m + r)P[\tilde{\Sigma}^Z] \quad (\text{VIII-6})$$

en raisonnant par récurrence, on en déduit :

$$\begin{aligned} V[\hat{S}^m](m + r) - (m + r)G - U(\overline{m + r}) - \tilde{Z} \\ = (V[\hat{S}^m](m) - mG - U(\bar{m}) - \tilde{Z}) \widehat{P[\tilde{\Sigma}^Z]}^r \end{aligned} \quad (\text{VIII-7})$$

d'où, puisque $V[\hat{S}^m](m)$ et $\tilde{V}(m)$ sont égaux :

$$\begin{aligned} \tilde{V}(m + rD[\tilde{\Sigma}^Z] + s) - V[\hat{S}^m](m + rD[\tilde{\Sigma}^Z] + s) \\ = - [\tilde{V}(m) - mG - U(\bar{m}) - \tilde{Z}] \widehat{P[\tilde{\Sigma}^Z]}^{rD[\tilde{\Sigma}^Z]} \widehat{P[\tilde{\Sigma}^Z]}^s \\ + \tilde{V}(m + rD[\tilde{\Sigma}^Z] + s) - (m + rD[\tilde{\Sigma}^Z] + s)G \\ - U(\overline{m + rD[\tilde{\Sigma}^Z] + s}) - \tilde{Z} \end{aligned} \quad (\text{VIII-8})$$

Pour obtenir le résultat cherché, il suffit de passer à la limite quand r tend vers l'infini dans (VIII-8), et de poser, pour tout $s = 0, \dots, D[\tilde{\Sigma}^Z] - 1$

$$\varepsilon^s(m) = - [\tilde{V}(m) - mG - U(\bar{m}) - \tilde{Z}] \prod^{(D[\tilde{\Sigma}^Z])} [\tilde{\Sigma}^Z] \widehat{P[\tilde{\Sigma}^Z]}^s \quad (\text{VIII-9})$$

Théorème 4. — Pour tout $i \in I_0$ et $s = 0, \dots, d - 1$, soit $\tilde{K}_i(s)$ l'ensemble des commandes $k \in K_i$ telle que :

$$\left[\begin{array}{c} gp_i[k] \\ q_i[k] + \tilde{z}(s-1)p_i[k] \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} gp_i[\tilde{\sigma}_s(i)] \\ q_i[\tilde{\sigma}_s(i)] + \tilde{z}(s-1)p_i[\tilde{\sigma}_s(i)] \end{array} \right] \quad (\text{VIII-10})$$

Il existe un entier M_0 tel que pour tout $m \geq M_0$ on ait :

$$\tilde{S}(md + s)(i) \in \tilde{K}_i(s) \quad \forall i \in I_0 \quad \forall s = 0, \dots, d - 1 \quad (\text{VIII-11})$$

(et par conséquent, si tous les ensembles $\tilde{K}_i(s)$ n'ont qu'un élément :

$$\tilde{S}(md + s)(i) = \tilde{\sigma}_s(i) \quad \forall i \in I_0 \quad \forall s = 0, \dots, d - 1. \quad (\text{VIII-12})$$

De plus, si on munit l'ensemble S de la topologie définie par l'écart :

$$\delta(S, T) = \lim_{m \rightarrow \infty} \|v[S](m) - v[T](m)\| \quad (\text{VIII-13})$$

toute stratégie optimale $\hat{S}$ est adhérente à l'ensemble des stratégies asymptotiquement d -périodiques, (c'est-à-dire, périodiques, de période d , pour m suffisamment grand).

Démonstration. — La première partie de l'énoncé est une conséquence de la proposition 20. Démontrons la seconde. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, soit $\hat{S}^m$ la stratégie telle que :

$$\hat{S}^m(r) = \begin{cases} \tilde{S}(r) & \text{si } r \leq m \\ \tilde{\sigma}_r & \text{si } r > m \end{cases} \quad (\text{VIII-14})$$

On vérifie sans difficulté que :

$$v_j[\hat{S}^m](r) = V_{rn+j}[\hat{S}^m](r) \quad \forall j \in I_0 \quad \forall r \in \mathbb{N} \quad (\text{VIII-15})$$

si bien que, d'après la proposition 21 :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \delta(\tilde{S}, \hat{S}^m) = 0 \quad (\text{VIII-16})$$

Comme par définition la stratégie $\hat{S}^m$ est d -périodique pour $r \geq m$, la démonstration est terminée.

FIGURES

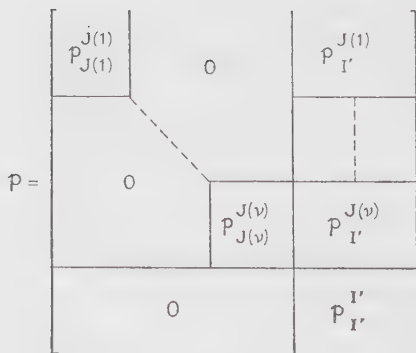


Figure 1

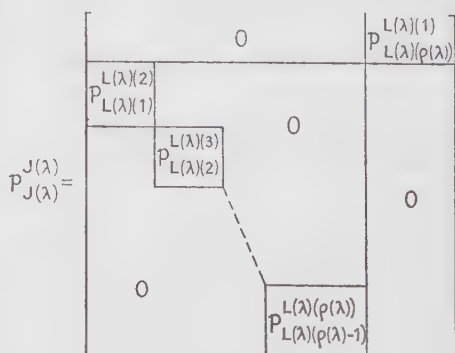


Figure 2

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_{J(1)}^{J(1)} & 0 & \pi_{J(1)}^{J(1)} \widehat{p_{I'}^{J(1)} (1-p_{I'})^{-1}} \\ 0 & \pi_{J(v)}^{J(v)} & \pi_{J(v)}^{J(v)} \widehat{p_{I'}^{J(v)} (1-p_{I'})^{-1}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Figure 3

$$P[\Sigma] = \begin{bmatrix} 0 & p[\Sigma_1] & 0 \\ 0 & 0 & p[\Sigma_2] \\ 0 & 0 & p[\Sigma_{d-1}] \\ p[\Sigma_0] & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Figure 4

$$\pi[\Sigma] = \begin{bmatrix} \frac{1}{d} \widehat{\pi^{(d)}[\sigma]} & \frac{1}{d} \widehat{\pi^{(d)}[\sigma] p[\sigma]} & \frac{1}{d} \widehat{\pi^{(d)}[\sigma] p^2[\sigma]} & \frac{1}{d} \widehat{\pi^{(d)}[\sigma] p^{d-1}[\sigma]} \\ \frac{1}{d} \widehat{\pi^{(d)}[\sigma] p^{d-1}[\sigma]} & \frac{1}{d} \widehat{\pi^{(d)}[\sigma]} & \frac{1}{d} \widehat{\pi^{(d)}[\sigma] p[\sigma]} & \frac{1}{d} \widehat{\pi^{(d)}[\sigma] p^{d-2}[\sigma]} \\ \frac{1}{d} \widehat{\pi^{(d)}[\sigma] p^{d-2}[\sigma]} & \frac{1}{d} \widehat{\pi^{(d)}[\sigma] p^{d-1}[\sigma]} & \frac{1}{d} \widehat{\pi^{(d)}[\sigma]} & \frac{1}{d} \widehat{\pi^{(d)}[\sigma] p^{d-3}[\sigma]} \\ \frac{1}{d} \widehat{\pi^{(d)}[\sigma] p[\sigma]} & \frac{1}{d} \widehat{\pi^{(d)}[\sigma] p^2[\sigma]} & \frac{1}{d} \widehat{\pi^{(d)}[\sigma] p^3[\sigma]} & \frac{1}{d} \widehat{\pi^{(d)}[\sigma]} \end{bmatrix}$$

Figure 5

EXEMPLES

Dans les exemples suivants, les gains finals $v_i(0)$ sont nuls et on se donne directement les nombres $q_i[k]$.

1) EXEMPLE 1. — *Comparaison asymptotique du gain moyen obtenu avec des stratégies constantes dans le temps.*

$j \backslash i$		1	2		3
			1	2	
K_i			1	2	
$p_i^j[k]$	1	0	1	0	1
	2	1	0	0	0
	3	0	0	1	0
$q_i[k]$		0	4	3	3

Il y a deux tactiques, caractérisées par leur valeur en $i = 2$.

On trouve :

$$d[1] = 2 \quad q[1]\pi[1] = (2, 2, 2) \quad w[1] = (-1, 1, 0)$$

$$d[2] = 3 \quad q[2]\pi[2] = (2, 2, 2) \quad w[2] = (-1, 1, 0)$$

Si $S_c^h(h = 1, 2)$ désigne la stratégie constante dans le temps telle que :

$$S_c^h(m) = [h] \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

on a (proposition 2) :

$$\begin{cases} \lim_{m \rightarrow \infty} [v[S_c^1](2m) - 2m(2, 2, 2)] = (0, 0, -1) \\ \lim_{m \rightarrow \infty} [v[S_c^1](2m + 1) - (2m + 1)(2, 2, 2)] = (-2, 2, 1) \end{cases}$$

et :

$$\begin{cases} \lim_{m \rightarrow \infty} [v[S_c^2](3m) - 3m(2, 2, 2)] = (0, 0, 0) \\ \lim_{m \rightarrow \infty} [v[S_c^2](3m + 1) - (3m + 1)(2, 2, 2)] = (-2, 1, 1) \\ \lim_{m \rightarrow \infty} [v[S_c^2](3m + 2) - (3m + 2)(2, 2, 2)] = (-1, 2, -1) \end{cases}$$

Les deux vecteurs

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [v[S_c^1](6m + s) - (6m + s)(2, 2, 2)]$$

et

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [v[S_c^2](6m + s) - (6m + s)(2, 2, 2)]$$

ne sont donc pas comparables quel que soit $s = 0, 1, \dots, 5$.

REMARQUE. — On a :

$m \backslash i$	$\tilde{v}(m)$			$\tilde{v}(m) - mg$			$\tilde{S}(m)(2)$	
	1	2	3	1	2	3	$k = 1$	$k = 2$
1	0	4	3	-2	2	1	*	
2	4	6	3	0	2	-1		*
3	6	8	7	0	2	1	*	
4	8	10	9	0	2	1	*	*
5	10	12	11	0	2	1	*	*
6	12	14	13	0	2	1	*	*
7	14	16	15	0	2	1	*	*
8	16	18	17	0	2	1	*	*
9	18	20	19	0	2	1	*	*
10	20	22	21	0	2	1	*	*
11	22	24	23	0	2	1	*	*
...	...	...	...	...	...	...	...	...

Ainsi, la suite $m \mapsto \tilde{v}(m) - mg$ est convergente; ce résultat est conforme à la proposition 10, puisque le P.G.C.D. des nombres $d[1]$ et $d[2]$ est égal à 1.

2) EXEMPLE 2. — Comparaison des points fixes de ψ et φ^0 .

$\begin{matrix} i \\ j \end{matrix}$		1				2				3				4			
		1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
K_i																	
$p_i^j[k]$	1	0,5	0	0,8	1	0,5	0,2	0,8	0,6	0,5	0	0,4	0	0	0	0,2	0
	2	0,5	1	0,2	0	0,5	0,8	0,2	0,4	0	0	0,4	0,2	0,2	0,1	0	0,1
	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	0	0,2	0,8	0	0,3	0,1	0,1
	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0,8	0,6	0,7	0,8
$q_i[k]$		3	4	2,4	2	1	1,6	0,4	0,8	0,5	6	0,4	1,8	1	0,3	0,2	1,1

Cherchons un point fixe de l'application ψ . En partant de la tactique $[1, 1, 1, 1]$, on trouve successivement :

- $$q[1, 1, 1, 1]\pi[1, 1, 1, 1] = (2, 2, 2, 2)$$

$$w[1, 1, 1, 1] = (1, -1, -2, -6)$$

$$\psi([1, 1, 1, 1]) = [1, 1, 1, 1]$$

Fin.

Par contre, si on cherche un point fixe de l'application φ^0 , on obtient, toujours en partant de la tactique $[1, 1, 1, 1]$:

- $$q[1, 1, 1, 1]\pi[1, 1, 1, 1] = (2, 2, 2, 2)$$

$$w[1, 1, 1, 1] = (1, -1, -2, -6)$$

$$\omega^0[1, 1, 1, 1] = (-1, 1, 3, 31)$$

$$\varphi^0([1, 1, 1, 1]) = [2, 2, 2, 4]$$
- $$q[2, 2, 2, 4]\pi[2, 2, 2, 4] = (2, 2, 2, 2)$$

$$w[2, 2, 2, 4] = \left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{16}{3}\right)$$

$$\omega^0[2, 2, 2, 4] = \left(-\frac{25}{18}, \frac{5}{18}, \frac{1013}{18}, \frac{989}{18}\right)$$

$$\varphi^0([2, 2, 2, 4]) = [2, 2, 2, 2]$$

$$q[2, 2, 2, 2]\pi[2, 2, 2, 2] = (2, 2, 2, 2)$$

$$w[2, 2, 2, 2] = \left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{16}{3}\right)$$

$$\omega^0[2, 2, 2, 2] = \left(-\frac{25}{18}, \frac{5}{18}, \frac{1\,061}{18}, \frac{1\,037}{18}\right)$$

$$\varphi^0([2, 2, 2, 2]) = [2, 2, 2, 2]$$

Fin.

Ainsi les points fixes de l'application ψ , s'ils donnent $\text{Max}_{\sigma \in \mathfrak{S}} q[\sigma]\pi[\sigma]$, ne donnent pas nécessairement $\text{Max}_{\sigma \in \mathfrak{S}_0} w[\sigma]$.

3) EXEMPLE 3. — $\mathfrak{S}_0^d$ n'est pas nécessairement contenu dans l'ensemble $\mathfrak{S}_0$.

$j \backslash i$		1	2	3		4	
				1	2	1	2
K_i	1	0	1	0	0	0	0
	2	1	0	0	1	1	0
	3	0	0	0	0	0	1
	4	0	0	1	0	0	0
$q_i[k]$		7	5	4	2	2	4

Il y a quatre tactiques qui sont caractérisées par leurs valeurs en $i = 3$ et $i = 4$. On trouve :

$$g = (6, 6, 6, 6)$$

$$\mathfrak{S}_0 = \{ [1, 1], [2, 1], [2, 2] \}$$

$$d = 2$$

Considérons la tactique $\Sigma \in \mathfrak{S}$ telle que :

$$\begin{cases} \Sigma_0 = [1, 1] \\ \Sigma_1 = [2, 2] \end{cases}$$

Cette tactique appartient bien à $\mathfrak{S}_0^d$ et cependant :

$$Q[\Sigma]\Pi[\Sigma] = (6, 6, 4, 6, 6, 6, 6, 4) < G$$

4) EXEMPLE 4. — Les tactiques $\tilde{\sigma}_s (s = 0, \dots, d-1)$ n'appartiennent pas nécessairement à $\mathfrak{S}_0$, même si $\mathfrak{S}_0$ n'a qu'un élément, (et par conséquent $\mathfrak{S}_0$ n'est pas nécessairement contenu dans l'ensemble $\mathfrak{S}_0^d$).

$j \backslash i$		1	2	3		4	
				1	2	1	2
K_i							
$p_i^j[k]$	1	0	1	1	0	1	0
	2	1	0	0	0	0	0
	3	0	0	0	1	0	0
$q_i[k]$	4	0	0	0	0	0	1
		12	2	5	5	4	6

Il y a quatre tactiques caractérisées par leurs valeurs en $i = 3$ et $i = 4$.
On trouve :

$$g = (7, 7, 7, 7)$$

$$\mathfrak{S}_0 = \{[1, 1]\}$$

$$d = 2$$

$i \backslash m$	$\tilde{v}(m)$				$\tilde{S}(m)(3)$		$\tilde{S}(m)(4)$		$\tilde{v}(m) - mg$			
	1	2	3	4	$k=1$	$k=2$	$k=1$	$k=2$	1	2	3	4
1	12	2	5	6	*	*		*	5	-5	-2	-1
2	14	14	17	16	*		*		0	0	3	2
3	26	16	22	22		*		*	5	-5	1	1
4	28	28	31	30	*		*		0	0	3	2
5	40	30	36	36		*		*	5	-5	1	1
6	42	42	45	44	*		*		0	0	3	2
7	54	44	50	50		*		*	5	-5	1	1
8	56	56	59	58	*		*		0	0	3	2
9	68	58	64	64		*		*	5	-5	1	1
10	70	70	73	72	*		*		0	0	3	2
11	82	72	78	78		*		*	5	-5	1	1
..	...	...	...	...	..	..	..	..	...	...	...	...

On a donc :

$$\tilde{\sigma}_0 = [1, 1] \quad \tilde{z}(0) = (0, 0, 3, 2)$$

$$\tilde{\sigma}_1 = [2, 2] \quad \tilde{z}(1) = (5, -5, 1, 1)$$

La tactique $[2, 2]$ n'appartient pas à $\mathfrak{S}_0$, et cependant, on a bien :

$$Q[\tilde{\Sigma}^Z] \Pi[\tilde{\Sigma}^Z] = (7, 7, 7, 7, 7, 7, 7) = G$$

INDEX DES NOTATIONS

c^x (V-18)	20	$(I_0, \gamma[\sigma])$	9
c^z	35	I	(VI-28) 29
C	3	I'	(VI-28) 29
$\mathcal{C}$	26	I ₀	27
$\gamma[\sigma]$	9	I _s	(VII-41) 38
$\Gamma[\Sigma]$	27	II $[\Sigma]$	27
d	26	I' $[\Sigma]$	27
$d[\sigma]$	9	$(\mathbf{I}_0, \Gamma[\Sigma])$	27
$D[\Sigma]$	27	$J(l)$	25
$\delta(S, T)$ (VIII-13)	46	$J[\sigma](\lambda)$	9
$E(l)$ (VI-2)	27	k	3
$f(m)$	40	K_i	3
$\varphi^x(\sigma)$ (III-6)	10	K _i	27
$\Phi^x(\Sigma)$ (VI-11)	28	$\tilde{\mathbf{K}}_i$	34
g (V-1)	19	$\bar{l}$	(VI-1) 27
G (VI-24)	29	$l^\#$	(VI-2) 27
I (V-3)	19	M^x	(V-19) 20
I' (V-3)	19	M^z	35
I_0	6	M'_0	44
$I[\sigma]$	9	n	3
$I'[\sigma]$	9	v	25

$\nu[\sigma]$	9	σ	4
$p[\sigma]$ (I-3)	4	$\tilde{\sigma}_s$ (VII-89)	43
$p_i^j[k]$	3	$\tilde{\sigma}^x$	13
$P[\Sigma]$ (VI-7)	27	Σ	27
$P_i^j[k]$ (VI-3)	27	$\tilde{\Sigma}^x$	28
$\pi[\sigma]$	9	$\mathbf{\Sigma}$	28
$\overset{(i)}{\pi}[\sigma]$	9	$\tilde{\Sigma}^0$ (VI-26)	29
$\varpi[\sigma]$ (II-40)	9	$\mathfrak{S}$	4
$\Pi[\Sigma]$	27	$\mathfrak{S}_0$	19
$\overset{(i)}{\Pi}[\Sigma]$	27	$\mathfrak{S}$	27
$q[\sigma]$ (I-3)	4	$\mathfrak{S}_0$	29
$q_i[k]$ (I-1)	3	$\tilde{\mathfrak{S}}$	34
$Q[\Sigma]$ (VI-8)	27	$U(s)$ (VI-52)	32
$Q_i[k]$ (VI-5)	27	$v_i(0)$	4
r	38	$\tilde{v}(m)$ (I-6)	4
$r_i^j[k]$	3	$v[S](m)$ (I-3)	4
$\rho(l)$ (V-50)	25	$V_i(0)$ (VI-46)	32
$\rho[\sigma](\lambda)$	9	$\tilde{V}(m)$ (VI-48)	32
S	4	$V[S](m)$ (VI-44)	31
$\tilde{S}$	4	$w[\sigma]$ (III-1)	10
$\hat{S}^m$ (VIII-14)	46	$W[\Sigma]$ (VI-9)	28
$\mathbf{S}$	31	$\tilde{x}$ (III-65)	17
$\bar{\mathbf{S}}$	36	$x[\sigma]$ (III-31)	13
$\tilde{\mathbf{S}}$	32	$\ x\ $ (II-1)	5
$\hat{\mathbf{S}}^m$ (VIII-3)	44	$x < y$ (II-3)	5
$\mathcal{S}$	4	$x \leq y$ (II-2)	5
$\mathbf{S}$	31		

$x \leq y$	(II-4)	5	$\tilde{z}(s)$	(VII-88)	44
$\begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^r \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^r \end{bmatrix}$	(II-6)	6	Z	(VI-55)	33
$\tilde{X}$	(VI-15)	28	$\zeta(m)$	(VII-31)	36
$X[\Sigma]$	(VI-14)	28	$\xi(m)$	(VII-31)	36
$z(s)$	(V-52)	26	$\xi[\Sigma](m)$	(VII-20)	35
			$\omega^x[\sigma]$	(III-3)	10
			$\Omega^x[\Sigma]$	(VI-10)	28

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. BELLMAN : *Dynamic Programming*. — Princeton University Press 1957.
 - [2] R. BELLMAN : *A Markovian decision process*. — Journal of Mathematics and Mechanics, vol. 6 (1957), n° 5, p. 679-684.
 - [3] D. BLACKWELL : *Discrete Dynamic Programming*. — Annals of Mathematical Statistics, vol. 33 (1962), n° 6, p. 719-726.
 - [4] C. DERMAN : *On Sequential Decisions and Markov Chains*. — Management Science, vol. 9 (1962), n° 1, p. 16-24.
 - [5] J. H. EATON and L. A. ZADEH : *Optimal pursuit strategies in discrete state probabilistic systems*. — Journal of Basic Engineering, vol. 84 (1962), série D, p. 23-29.
 - [6] P. L. HENNEQUIN et A. TORTRAT : *Théorie des Probabilités et quelques applications*. — Masson, Paris 1965.
 - [7] R. A. HOWARD : *Dynamic Programming and Markov Processes*. — The Massachusetts Institute of Technology, 1960.
 - [8] J. G. KEMENY et J. L. SNELL : *Finite Markov Chains*. — Van Nostrand, Princeton 1960.
 - [9] E. LANERY : *Étude asymptotique des systèmes markoviens à commande*. — Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. 264, p. 712-714 (10 avril 1967).
 - [10] R. PALLU DE LA BARRIERE : *Cours d'Automatique Théorique*. — Dunod, Paris 1966.
- Traduction anglaise : *Optimal Control Theory*. — Saunders, Philadelphia 1967.

